



Principes d'analyse de sensitivite,utilisation pour la conception optimale

B. Rousselet

► To cite this version:

B. Rousselet. Principes d'analyse de sensitivite,utilisation pour la conception optimale. RR-0521, INRIA. 1986. inria-00076033

HAL Id: inria-00076033

<https://inria.hal.science/inria-00076033>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



CENTRE DE ROCQUENCOURT

Rapports de Recherche

N° 521

**PRINCIPES D'ANALYSE
DE SENSITIVITÉ,
UTILISATION POUR
LA CONCEPTION OPTIMALE**

Bernard ROUSSELET

Avril 1986

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
France

Tél. : (1) 39 63 55 11

**PRINCIPES D'ANALYSE DE SENSITIVITE ET DE SON UTILISATION
POUR LA CONCEPTION OPTIMALE**

Bernard ROUSSELET

Département de Mathématiques

Université de Nice - 06034 - Nice Cedex

et

I.N.R.I.A. - projet MODULEF

Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105

78153 - Le Chesnay Cedex

RESUME

On décrit dans ce rapport deux méthodes de calcul de coefficients de sensibilité qu'on illustre par exemples en mécanique des structures. Après avoir précisé quelques résultats de base en optimisation, avec et sans contraintes, on détaille un algorithme de gradient projeté qui permet de résoudre itérativement des problèmes d'optimisation de structures en utilisant les coefficients de sensibilité. On indique également l'utilisation de variables inverses pour obtenir des coefficients de sensibilité de meilleure qualité.

ABSTRACT

In this report, methods of computation of sensitivity coefficients are provided with examples from structural mechanics. After recalling some basic results in unconstrained and constrained optimization a gradient projection method is detailed ; it enables to solve iteratively problems of structural optimization using the sensitivity coefficients. The use of inverse variables is also indicated ; it yields sensitivity coefficients of better quality.



I. POSITION DU PROBLEME : BIBLIOGRAPHIE DE BASE

2. METHODES DE CALCUL DES COEFFICIENTS DE SENSITIVITE

- 2.1. Introduction ; cadre des structures discrétisées.
- 2.2. Méthode directe ou de l'espace de conception.
- 2.3. Méthode de l'état adjoint ou de l'espace d'état.

3. COMPLEMENTS

- 3.1. Etat adjoint ; cadre des équations aux dérivées partielles :
 - a - Poutre d'épaisseur variable en flexion ;
 - b - Plaque d'épaisseur variable en flexion ;
 - c - Elasticité plaque (membrane) ;
 - d - Arche en flexion ;
 - e - Principe de calcul de l'état adjoint.
 - f - Exemples explicites.
- 3.2. Etat adjoint dans le cas de l'arche en flexion.

4. OPTIMISATION SANS CONTRAINTES

- 4.1. Rappels d'algèbre linéaire et de calcul différentiel ; conditions d'optimalité.
- 4.2. Principe du choix de la direction de descente.

5. OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES

- 5.1. Un exemple introductif.
- 5.2. Conditions d'optimalité en programmation non linéaire :
 - a - Conditions du premier ordre ;
- 5.3. Classification sommaire des problèmes.
- 5.4. Applications des conditions d'optimalité :
 - a - Analyse des structures ;
 - b - Conception optimale des structures.

Annexe

6. ALGORITHMES D'OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES

- 6.1. Projection du gradient avec contraintes linéaires :
 - a - Rappel sur la projection ;
 - b - Le cas quasiment non contraint ;
 - c - Contraintes linéaires quelconques.

6.2. Extention au cas de contraintes non linéaires.

6.3. Analyse de l'algorithme de gradient projeté :

a - Programmation non linéaire ;

b - Adaptation à la conception optimale.

7. INTRODUCTION A LA DUALITE

7.1. Rappel sur les points cols.

7.2. Dualité par les points cols pour un problème d'optimisation avec contraintes.

7.3. Algorithmes :

a - Uzawa. Cas séparable ;

8. UTILISATION DE VARIABLES INVERSES EN OPTIMISATION DE STRUCTURES

8.1. Structures en extension ou bien en flexion.

8.2. Utilisation de la linéarisation par rapport aux variables inverses.

I. POSITION DU PROBLEME ; BIBLIOGRAPHIE DE BASE

Considérons l'exemple d'une structure élastique discrétisée par éléments finis.

On désigne par $x = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^p \\ x^p \end{bmatrix}$ le vecteur des variables de conception ;

ces variables peuvent être des épaisseurs d'éléments de structures ou des propriétés de matériaux ou même la position géométrique d'éléments de la structure. Les matrices de rigidité élémentaires dépendent donc de x ainsi que la matrice de rigidité globale

$$K(x) = [K_j^i(x)]_{1 \leq i, j \leq n}.$$

On désigne* par $u = \begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \\ u^n \end{bmatrix}$ le vecteur des déplacements nodaux et par

$p(x) = \begin{bmatrix} p^1(x) \\ \vdots \\ p^n(x) \\ p^n(x) \end{bmatrix}$ le vecteur des charges nodales ; ces charges peuvent

dépendre des variables de conception : par exemple le poids propre dépend de la densité du matériaux et de l'épaisseur de la structure.

Pour la valeur x du vecteur de conception, le déplacement u de la structure est solution du système linéaire

$$K(x)u = p(x)$$

ou, avec la convention des indices répétés (utilisée sans autre mention dans la suite) :

$$K_j^i(x)u^j = p^i(x) \text{ pour } i = 1, \dots, n.$$

Nous supposons que les degrés de liberté associés aux déplacements imposés ont été éliminés : la matrice K est réduite ; ce système linéaire admet donc une solution unique qui dépend implicitement de x ; du point de vue de la pratique numérique, il est illusoire de remarquer que u est définie explicitement à partir de x par la formule

$$u = K(x)^{-1} p(x) !$$

* On adopte ici les notations usuelles de l'analyse des structures au détriment de celles utilisées en contrôle optimal où u désigne la variable de conception indiquée ici par x . En conséquence, en présence d'équations aux dérivées partielles, on désigne par ξ la variable d'espace.

En pratique, les codes de calcul permettent, à partir d'une valeur x du vecteur de conception, de calculer numériquement la solution du système indiqué. A partir de son expérience, le concepteur dimensionne une structure en faisant des essais avec différentes valeurs du vecteur de conception. Ce rapport propose une méthode systématique pour calculer la dérivée par rapport aux variables de conception de toute fonction des déplacements et tensions (ou contraintes) de la structure.

Le calcul des dérivées partielles (ou coefficients de sensibilité) d'une telle fonction par rapport aux composantes du vecteur de conception (les "design variables") s'appelle dans la littérature anglosaxonne "design sensitivity analysis".

Précisons que dans ce contexte, le mot "design" n'a pas le sens de forme géométrique comme c'est l'usage en français.

Voici un problème typique d'optimisation de structures : on désigne par x_e les épaisseurs des éléments de la structure discrétisée et par ρ_e la masse surfacique ; on cherche à minimiser la masse $J_0(x) = \sum_e \rho_e x_e$ sous les contraintes

$$|u_i| \leq c_i \quad \text{et} \quad 0 \leq \underline{x}_e \leq x_e \leq \bar{x}_e.$$

On peut aussi considérer des contraintes sur les tensions (par exemple critère de Von Mises) ; on peut aussi prévoir des contraintes sur les modes propres de vibration ou la charge critique de flambement ; on pourrait aussi considérer le cas d'une structure en régime dynamique.

On notera $J_1(u(x), x) \leq 0$ une contrainte quelconque ; les contraintes de bornes

$$0 \leq \underline{x}_e \leq x_e \leq \bar{x}_e$$

sont traitées à part : on verra aux §§ 5.2., 5.3., 5.4. et 6.1. que ces contraintes sont beaucoup plus simples à traiter. Le cas des contraintes sur les valeurs propres fera l'objet de la section 3.4.

Pour les problèmes d'optimisation en général, on pourra consulter Céa [1971], Ciarlet [1982], Luenberger [1973], Minoux [1983] et Polak [1971] ; on pourra également consulter les articles de Fleury dans Morris ed. [1982] ; ce livre est le compte rendu d'un Institut de l'OTAN consacré à l'optimisation de structures discrétisées par éléments finis. Le livre de Haug-Céa eds. [1980] est le compte rendu d'un autre Institut de l'OTAN consacré à l'optimisation de structures modélisées par équations aux dérivées partielles mais il fournit également des méthodes numériques dans le cadre des éléments finis. Le cas où l'on prend comme variables de conception la géométrie du système ("shape optimal design") est étudié dans les articles de Céa, Rousselet, Zolésio de ce livre.

Pour le contrôle de systèmes régis par équations aux dérivées partielles on consultera Lions [1968] et dans le cas de systèmes singuliers Lions [1983]. Pour l'optimisation de structures on consultera Hang-rora [1979] ET Banichuk [1983]. Pour l'optimisation de forme dans le cadre de la mécanique des fluides : Pironneau [1984]. Une école INRIA [1983] consacrée à l'optimisation de forme (organisée par Céa-Rousselet) et une école INRIA [1982] organisée par O. Pironneau.

Nous rappelons pour mémoire une des premières méthodes utilisées. On considère u et x comme des variables indépendantes et l'équation d'état comme une contrainte d'égalité.

Cette approche présente l'avantage d'être d'utilisation facile dès que l'on dispose d'un programme efficace d'optimisation avec contraintes.

Mais il présente deux inconvénients importants :

1. Le nombre de variables du programme d'optimisation est très important ; il faut en effet ajouter aux variables de conception tous les degrés de liberté de la structure.
2. Dans les méthodes d'optimisation avec contraintes non linéaires d'égalité il est en général difficile de satisfaire très précisément ces contraintes puisque l'on utilise habituellement des méthodes de linéarisation. Il s'en suit que l'équation d'état $K(x)u = p(x)$ est approximativement satisfaite alors que l'on dispose de méthodes efficaces de résolution de systèmes linéaires.

Pour ces deux raisons cette approche qui peut paraître élégante est irréaliste.

Position du problème

En fait l'idée fondamentale est de considérer un problème de conception optimale comme un problème d'optimisation par rapport aux seules variables de conception x et à considérer que l'équation d'état du système $K(x)u = p(x)$ définit implicitement une fonction $x \rightarrow u(x)$.

Pour traiter ce problème avec un algorithme on est amené à linéariser la fonctionnelle et les contraintes (analyse de sensibilité).

Posons $j_\ell(x) = J_\ell(u(x), x)$, on doit calculer :

$$\delta j_\ell(x) = \frac{\partial J_\ell}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial J_\ell}{\partial x} \delta x$$

$$\delta j_\ell(x) = \frac{\partial J_\ell}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial x^k} \delta x^k + \frac{\partial j_\ell}{\partial x^k} \delta x^k$$

les coefficients de sensibilité de la fonctionnelle $J_e(u(x), x)$ sont les nombres

$$\frac{\partial J_l}{\partial x^k} = \frac{\partial J_l}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial x^k} + \frac{\partial J_l}{\partial x^k} .$$

Comme l'on ne dispose pas de formule explicite pour $x \rightarrow u(x)$, la difficulté est maintenant de calculer $\frac{\partial u}{\partial x}$.

On peut naturellement utiliser une méthode par différences finies pour calculer

$$\frac{\partial u}{\partial x^k} \approx \frac{u(x + tx^k) - u(x)}{t} ;$$

cette méthode est peu coûteuse en matière grise mais fort chère en temps calcul puisque l'on doit calculer p fois l'état du système (où p est le nombre de variables de conception) pour évaluer le gradient.

Nous indiquons dans le chapitre suivant deux autres méthodes pour ce calcul.

2. METHODES DE CALCUL DES COEFFICIENTS DE SENSITIVITE

2.1. Introduction

Remarquons tout d'abord que comme $x \rightarrow u(x)$ est définie implicitement par l'équation $K(x)u = p(x)$ sa dérivabilité et le calcul de sa dérivée ne sont pas immédiats.

Rappel du cas élémentaire :

Soit $(x,u) \rightarrow f(x,u)$ une fonction de deux variables scalaires x et u ; l'équation

$$(2.1) f(x,u) = 0$$

définit en général, une fonction implicite $x \rightarrow u(x)$ au voisinage de (x_0, u_0) solution de (1) ; l'existence de cette fonction implicite et sa dérivabilité est assurée si :

. $(x,u) \rightarrow f(x,u)$ est continûment différentiable au voisinage de (x_0, u_0) ;

. et si $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0) \neq 0$

et l'on a

$$(2.2) \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dx} = - \frac{\partial f}{\partial x}$$

c'est le théorème des fonctions implicites indiqué dans tous les livres d'analyse des fonctions de plusieurs variables.

Dans le cas vectoriel : si x et u sont des variables vectorielles, on a un résultat analogue ; l'égalité (2.2) est encore valable mais c'est maintenant une égalité vectorielle et l'on doit supposer que l'application linéaire $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)$ est inversible ou que son déterminant est non nul.

En développant dans des bases

$$x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^k \\ x^p \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^j \\ u^n \end{bmatrix}$$

Les équations (2.1) s'écrivent

$$(2.1') f^i(x^1, \dots, x^p ; u^1, \dots, u^n) = 0 ;$$

si l'on a $\det \left(\frac{\partial f^i}{\partial u_j} \right)_{1 \leq i, j, \leq n} \neq 0$ alors $\frac{\partial u^j}{\partial x^k}$ est solution du système linéaire :

$$(2.2') \quad \frac{\partial f^i}{\partial u_j} \frac{\partial u^j}{\partial x^k} = - \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \text{ pour } i = 1, \dots, n \text{ et } k = 1, \dots, p.$$

Dans le cas des structures élastiques en équilibre on peut utiliser directement la proposition suivante.

Proposition 2.1

Soit $x \rightarrow K(x)$ une matrice de rigidité réduite dépendant de variables de conception $x = (x^1, \dots, x^p)^T$; alors, si $x \rightarrow K(x)$ est continûment différentiable en x_0 , et si $x \rightarrow p(x)$ (vecteur des charges nodales) l'est aussi, le déplacement $u(x)$ de la structure qui est solution de $K(x)u = p(x)$ est continûment différentiable et $\frac{du}{dx}$ est donnée par la solution de l'équation

$$(2.3) \quad K(x) \frac{du}{dx} = \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial x}(x)u$$

ou en notation développée, chaque dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial x^k}$ est solution du système linéaire :

$$(2.3') \quad K_j^i(x) \frac{\partial u^j}{\partial x^k} = \frac{\partial p^i(x)}{\partial x^k} - \frac{\partial K_j^i(x)}{\partial x^k} u^k(x) \quad i = 1, \dots, n.$$

Remarque 2.1

On peut démontrer assez facilement cette proposition sans référer au théorème des fonctions implicites (section 2.4.).

Nous verrons dans les sections 2.2. et 2.3. deux méthodes pour calculer les dérivées $\frac{\partial j}{\partial x^k}$ d'une fonctionnelle $j(x) = J(x, u(x))$ en partant de cette proposition.

Remarque 2.2

Le résultat ci-dessus a été étendu à de nombreuses autres situations :

- En élasticité linéaire statique et dynamique et en mode propre : Haug-Rousselet [1980a] et [1980b], Rousselet-Haug [1982], Rousselet [1976], Rousselet [1977], Rousselet [1982].

- Un cadre général pour des situations modélisées par équations aux dérivées partielles se trouve dans Chavent [1971].

- Le cas où la variable de conception est la géométrie du système ("shape optimal design") a fait l'objet de nombreux travaux ; citons par exemple : Céa-Gioan-Michel [1974], Chenais [1977], Dervieux-Palmério [1975], Murat-Simon [1976], Pironneau [1984], Rousselet [1982], Rousselet [1983], Zolésio [1979].

- Le cas d'une arche avec la surface moyenne comme variable de conception a été étudié dans Chenais-Rousselet-Benedict [1985] et Chenais-Rousselet [1984]. L'extension au cas de la charge critique de flambement est étudié dans Chenais-Rousselet [1986 à paraître] et Rousselet-Chenais [1986 à paraître]. L'extension au cas de coques élastiques est étudié dans Chenais [1986 à paraître].

Remarque 2.3

On trouvera dans § 2.4. une démonstration directe de la dérivabilité de la solution par rapport à des variables de conception.

2.2. Méthode directe ou de l'espace de conception

Principe : on calcule chacune des dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x^k}$ par résolution effective des systèmes linéaires (2.3') ($k = 1, \dots, p$)

$$(2.3') \quad K_j^i(x) \frac{\partial u^j}{\partial x^k} = \frac{\partial p^i(x)}{\partial x^k} - \frac{\partial K_j^i(x)}{\partial x^k} u^k(x) \quad i = 1, \dots, n.$$

On calcule ensuite les coefficients de sensibilité d'une fonctionnelle $j(x) = J(x, u(x))$ par :

$$\frac{\partial j}{\partial x^k} = \frac{\partial J}{\partial x^k} + \frac{\partial J}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial x^k}$$

Evaluation

- La matrice $K(x)$ des systèmes linéaires (2.3') est celle de l'analyse du système. Si l'on résout l'analyse du système par une méthode directe on peut conserver la décomposition triangulaire de la matrice K et il suffit d'effectuer une "descente-remontée" pour résoudre un système (2.3'). Il faut donc effectuer p "descentes-remontées" pour les p systèmes (2.3') où p est le nombre de variables de conception.

Si l'on résout l'analyse du système par une méthode itérative on ne peut pas utiliser une partie du calcul pour résoudre les p systèmes (2.3').

- Si l'on doit considérer plusieurs cas de charges on doit multiplier ce nombre p par le nombre de cas de charges pour obtenir le nombre de systèmes linéaires à résoudre.

- Toutefois si l'on doit calculer les dérivées de plusieurs fonctionnelles J^l cela n'augmente pas le nombre de systèmes linéaires à résoudre.

2.3. Méthode de l'état adjoint ou de l'espace d'état

C'est la méthode appelée "State space method" par exemple dans Haug-Arora [1979] et dans les notices du code Nastran.

Principe dans le cas discret

En supposant les repères orthonormés faisons le produit scalaire de l'équation (2.3') par un vecteur*

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\lambda_i K_j^i(x) \frac{\partial u^j}{\partial x^k} = \lambda_i \frac{\partial p^i}{\partial x^k} - \lambda_i \frac{\partial K_j^i}{\partial x^k} u^k(x)$$

rapprochons cette expression de

$$\frac{\partial J}{\partial x^k} = \frac{\partial J}{\partial x^k} + \frac{\partial J}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial x^k},$$

On constate que si λ est solution du système linéaire (état adjoint)

$$\lambda_i K_j^i(x) = \frac{\partial J}{\partial u^j} \text{ pour } j = 1, \dots, n$$

on obtient

$$(2.4) \quad \frac{\partial J}{\partial x^k} = \frac{\partial J}{\partial x^k} + \lambda_i \frac{\partial p^i}{\partial x^k} - \lambda_i \frac{\partial K_j^i}{\partial x^k} u^k(x)$$

Evaluation

- L'expression (2.4) ne fait intervenir que des dérivées directement calculables : $\frac{\partial J}{\partial x^k}$, $\frac{\partial p}{\partial x^k}$, $\frac{\partial K}{\partial x^k}$ et les solutions de deux systèmes linéaires u et λ .

- On constate que λ est solution d'un système linéaire de même matrice que pour l'analyse de la structure ; dans le cas d'un système dont la matrice ne serait pas symétrique il faudrait transposer la matrice. Toutefois cette situation ne se produit pas dans l'analyse des structures élastiques.

* Nous désignons par λ l'état adjoint au lieu de p comme c'est usuel en théorie du contrôle ou de la conception pour éviter des confusions avec les charges p .

- On a autant d'états adjoints à résoudre que de fonctionnelles dont on doit calculer les dérivées et cela quel que soit le nombre de variables de conception.
- En général le nombre de fonctionnelles est inférieur au nombre de variables de conception ; de plus avec plusieurs cas de charge cela ne change pas le nombre d'états adjoints à calculer.
- Cette méthode est donc préférable à celle de l'espace de conception sauf si le nombre de fonctionnelles est supérieur au nombre de variables de conception et que la structure n'est soumise qu'à un cas de charge.

Remarque 2.4

L'équation d'état peut s'écrire : trouver $u \in V$ tel que

$$\forall v \in V \quad a(x; u, v) = l(x; v)$$

où $a(x; u, v) = (K(x)u, v)$ $l(x; v) = (p(x), v)$. V est un espace vectoriel de déplacements virtuels.

L'état adjoint est solution de $\forall v \in V \quad a(x; v, \lambda) = (\frac{\partial J}{\partial u}, v)$ et la dérivée de $j(x) = J(x; u(x))$ s'écrit

$$\frac{\partial j}{\partial x^k} = \frac{\partial J}{\partial x^k} + \left(\lambda, \frac{\partial p}{\partial x^k} \right) - \frac{\partial a}{\partial x^k}(x, u, \lambda) .$$

C'est cette forme que nous allons retrouver dans les modèles continus.

3. COMPLEMENTS

3.1. Etat adjoint dans le cas continu

Dans les sections précédentes on a présenté le calcul de la dérivée d'une fonctionnelle $J(u(x), x)$ calculée directement à partir d'une équation matricielle $K(x)u = p(x)$.

On peut aborder le problème de la dérivée d'une fonctionnelle $J(u(x), x)$ où $u(x)$ est maintenant une fonction des variables* d'espace ξ au lieu d'être un vecteur à n composantes ; cette fonction $u(x; \xi)$ est elle même solution d'une équation aux dérivées partielles.

Nous nous limitons ici au cas statique ; nous renvoyons à Rousselet [1982a] et Rousselet [1982b] pour une étude du problème dynamique. On peut étendre la méthode à des situations non linéaires sous réserve que l'analyse soit bien maîtrisée (Rousselet [1983]).

Dans le cas statique nous indiquons quelques exemples qui entrent dans ce cadre (voir aussi par exemple, Haug-Rousselet [1980a] et Haug-Arora [1979] ainsi que Haug-Choï-Komkov [1986, à paraître], Banichuk [1983]).

On désigne par E le module de Young et ν le coefficient de Poisson.

a - Poutre d'épaisseur variable en flexion

On suppose par exemple que toutes les sections droites sont de même forme. L'énergie de déformation est donnée par :

$$(3.1) \quad a(x; u, u) = \int_0^l E \alpha h^2 u'' u'' d\xi$$

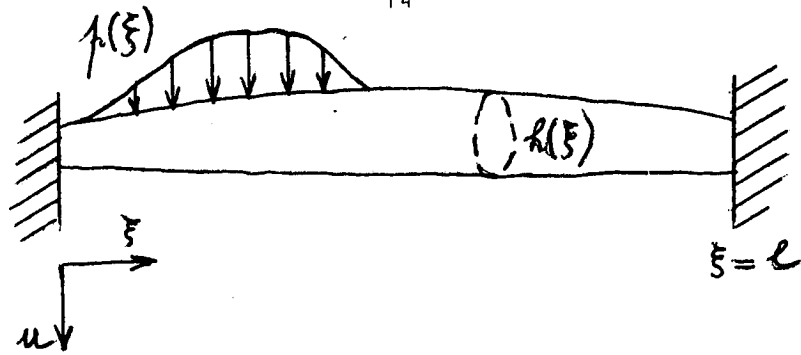
où α est une constante qui dépend de la géométrie de la section droite, h désigne l'aire de cette section, $x = (E, h)$ E est un nombre mais h est une fonction de ξ .

Le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\forall v \in V \quad a(x; u, v) = l(v)$$

où V est un espace de déplacements cinématiquement admissibles (par exemple $V = H_0^2(0, l)$ pour une poutre encastrée). On peut montrer que a est une forme bilinéaire continue coercitive sur V et que $l(v)$ est une forme sur V .

* On note ici $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ les variables d'espace au lieu de x comme en équations aux dérivées partielles pour éviter des confusions avec la variable de conception.



b - Plaque d'épaisseur variable en flexion

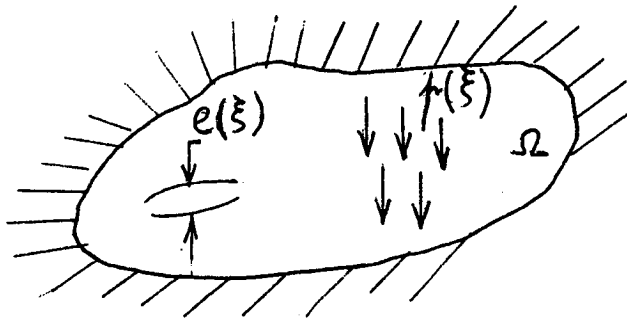
L'énergie de déformation s'écrit :

$$(3.2) \quad a(x; u, u) = \iint_{\Omega} D(x) [(1-\nu)u_{,\alpha\beta} u_{,\alpha\beta} + \nu u_{,\alpha\alpha} u_{,\beta\beta}] d\xi^1 d\xi^2$$

$$\text{avec } D(x) = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} \text{ et } x = (E, \nu, e)$$

e désigne ici l'épaisseur de la plaque. C'est une fonction de $\xi = (\xi^1, \xi^2)$.

$$l(v) = \iint_{\Omega} p v d\xi^1 d\xi^2.$$



Le principe des travaux virtuels s'écrit encore

$$\forall v \in V \quad a(x; u, v) = l(v)$$

où V est un espace de déplacements cinématiquement admissibles (par exemple $V = H_0^2(\Omega)$ pour une plaque encastree). On peut encore montrer les mêmes propriétés pour les formes a et l .

Remarque 3.1

On est dans le cas particulier d'une coque plate. Les effets de flexion et de membrane sont découplés. Avec les notations de Koiter [1966] on a

$$\gamma_{\alpha\beta} = 0 \text{ et } \rho_{\alpha\beta} = u_{,\alpha\beta}.$$

c - Elasticité plane (membrane)

On considère le cas d'un corps élastique mince chargé dans son plan pour lequel la contrainte normale est négligeable : contrainte plane. L'énergie de déformation s'écrit :

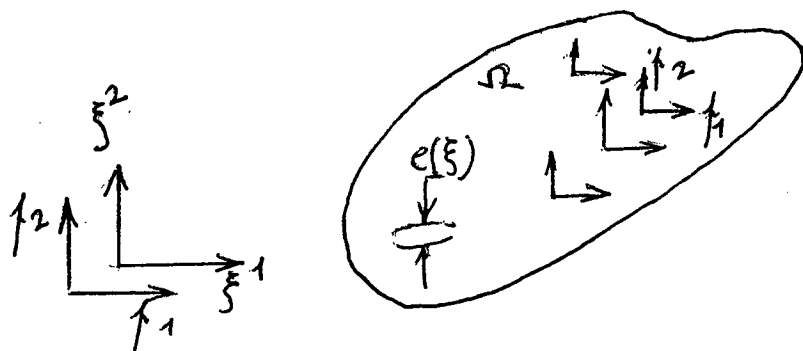
$$(3.3) \quad a(x; u, u) = \iint_{\Omega} c(x) [(1-\nu) \gamma_{\alpha\beta}(u) \gamma_{\alpha\beta}(u) + \nu \gamma_{\alpha\alpha}(u) \gamma_{\beta\beta}(u)] d\xi^1 d\xi^2$$

$$\text{avec } c(x) = \frac{Ee}{1-\nu^2} \text{ et } x = (E, \nu, e) \quad \gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha, \beta} + u_{\beta, \alpha}) .$$

e désigne encore l'épaisseur du corps. C'est une fonction de $\xi = (\xi^1, \xi^2)$.

$$\ell(x; v) = \iint_{\Omega} p_{\alpha} v_{\alpha} d\xi^1 d\xi^2$$

où p désigne la densité de force.



Le principe des travaux virtuels s'écrit encore

$$\forall v \in V \quad a(x; u, v) = \ell(x; v)$$

où V est un espace de déplacements cinématiquement admissibles (par exemple $V = (H_0^1(\Omega))^2$ si $u = 0$ sur le bord).

Remarque 3.2

On a ici $\rho_{\alpha\beta} = 0$. La situation est duale de la plaque en flexion. Dans le cas des coques les deux déformations sont couplées. Pour l'étude de la dépendance de la solution d'une coque par rapport à la surface moyenne on renvoie à Chenais [1986]. On considère dans la section suivante le cas plus simple d'une arche. Cette question a déjà été étudiée dans Chenais-Rousselet-Benedict [1984].

d - Arche en flexion (poutre courbe)

L'énergie de déformation s'écrit :

$$(3.4) \quad a(x; u, u) = \int_0^l [C \gamma_{11}(u) \gamma_{11}(u) + D \rho_{11}(u) \rho_{11}(u)] \frac{1}{a^{3/2}} d\xi$$

et

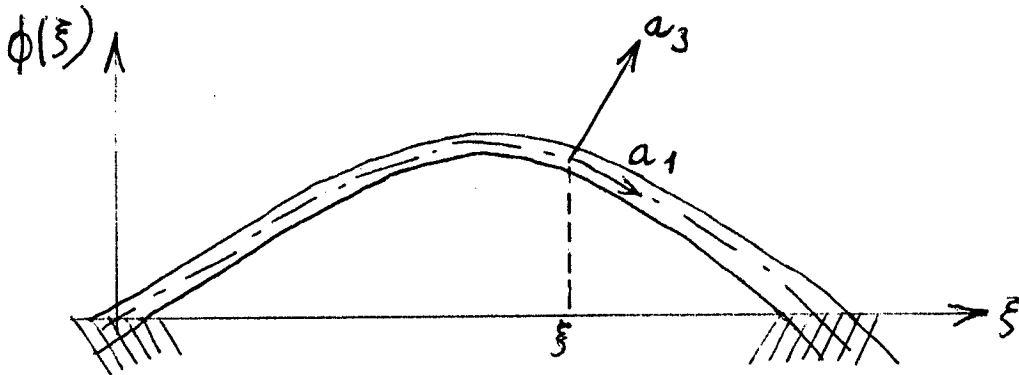
$$l(x;v) = \int_0^l p.v \, a \, d\xi$$

$$\text{où } C = Eeh \quad D = \frac{Ee^3}{12} h \quad x = (E, e, h, \phi)$$

e désigne l'épaisseur de l'arche et h sa profondeur. Avant de préciser complètement les notations, nous rappelons que le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\forall v \in V \quad a(x;u,v) = l(x;v) .$$

Nous introduisons quelques notations classiques en théorie des coques (Koiter [1966]) légèrement simplifiées pour tenir compte du caractère unidimensionnel du modèle (cf. § 4.1 pour des rappels d'algèbre linéaire).



On décompose le vecteur déplacement u dans une base (a_1, a_3) où a_1 est un vecteur tangent à la ligne moyenne et par a_3 un vecteur normal normé : $u = u^1 a_1 + u^3 a_3$; on suppose que l'arc Γ est paramétré : $\xi \rightarrow m(\xi)$ ce paramétrage est explicité dans un repère orthonormé fixe du plan et on identifie un point $m(\xi)$ au vecteur $\phi(\xi) = \begin{bmatrix} \phi^1(\xi) \\ \phi^2(\xi) \end{bmatrix}$; désignons par $,1$ la dérivée par rapport à ξ ; on peut prendre pour a_1 le vecteur

$$\begin{bmatrix} \phi_{1,1}(\xi) \\ \phi_{2,1}(\xi) \end{bmatrix} = \phi_{,1}(\xi) ; \text{ on note dorénavant ces } \underline{\text{identifications}} \text{ par des}$$

égalités ; c'est ainsi que l'on pourra choisir :

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{bmatrix} \phi_{,1}^2 \\ -\phi_{,1}^1 \end{bmatrix} \text{ avec } a = (\phi_{,1}^1)^2 + (\phi_{,1}^2)^2 = a_1 \cdot a_1 \text{ (première forme fondamentale).}$$

Dans le cas d'une courbe on n'utilise qu'un symbole de Christoffel que l'on note Γ au lieu de Γ_{11}^1 :

$$\Gamma = a^1 \cdot a_1 = \frac{a_{,1}}{2a} \quad \text{où}$$

(a^1, a^3) désigne la base duale de (a_1, a_3) ; on identifie ici, (cf. théorème 4.1) grâce au produit scalaire défini dans la base fixe orthonormée du plan, vecteurs et formes linéaires, si bien que comme a_3 est normé et orthogonal à a_3 on a :

$$a^3 = a_3 \quad \text{et} \quad a^1 = \frac{a_1}{a}$$

si bien que $a^{11} = a^1 \cdot a^1 = \frac{1}{a}$.

La deuxième forme fondamentale est donnée par :

$$b_{11} = -\frac{a_1}{R} \quad (b_{11} = -a_1 \cdot a_{3,1} = a_3 \cdot a_{1,1})$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\phi_{,1}^1 \phi_{,11}^2 - \phi_{,11}^1 \phi_{,1}^2}{a^{3/2}} \quad (\text{inverse du rayon de courbure})$$

d'autre part :

$$b_1^1 = a^{11} b_{11} = -\frac{1}{R}$$

Avec ces notations on a donc :

$$a_{3,1} = -b_1^1 a_1 = \frac{1}{R} a_1$$

$$a_{1,1} = \Gamma a^1 + b_{11} a_3 = \frac{a_{,1}}{2a} a_1 - \frac{a_1}{R} a_3$$

$$a_{1,1} = -\Gamma a^1 + b_1^1 a_3 = -\frac{a_{,1}}{2a} a^1 - \frac{1}{R} a_3 .$$

Le tenseur de déformation de la surface moyenne est donné par :

$$\gamma_{11} = u_{1|1} - b_{11} u_3$$

avec

$$u_{1|1} = u_{1,1} - \Gamma u_1 .$$

Le tenseur de variation de courbure :

$$\rho_{11} = u_{3|11} + b_1^1 u_{1|1} + b_{11}^1 u_1$$

avec

$$u_{3|11} = u_{3,11} - \Gamma u_{3,1}$$

et

$$b_{1|1}^1 = b_{1,1}^1 \quad (\text{les deux termes qui font intervenir } \Gamma \text{ s'annulent}) .$$

L'élément de longueur est donné par $\sqrt{a} d\xi$ mais l'énergie de déformation est donnée par :

$$\int_0^{\ell} [C \gamma_{11}(u) \gamma_{11}(u) + D \rho_{11}(u) \rho_{11}(u)] a^{11} a^{11} \sqrt{a} d\xi$$

d'où l'expression de la forme bilinéaire indiquée au début du paragraphe.

Remarque 3.3

Dans le cas d'un cylindre infini chargé perpendiculairement à l'axe, le déplacement le long de l'axe est nul et l'on est encore ramené à un problème unidimensionnel avec une forme bilinéaire analogue mais avec des constantes différentes ; voir Bernadou-Ducatel [1982] pour une étude de la convergence d'un élément fini rectiligne.

e - Principe de calcul de l'état adjoint

Nous venons de rappeler quelques exemples mécaniques qui se mettent sous la forme : Trouver $u \in V$ tel que

$$\forall v \in V \quad a(x; u, v) = l(x; v)$$

où V est un espace de Hilbert avec a forme bilinéaire et l forme linéaire ; x est une variable de conception qui peut être un scalaire, un vecteur ou une fonction. On peut donc supposer que x décrit un ouvert X_{ad} d'un espace normé X .

Supposons (voir section 2.6.) que l'on ait montré la dérivabilité de la fonction implicite

$$x \rightarrow u(x) \text{ de } X \text{ dans } V \quad .$$

L'équation d'état dérivée peut s'écrire :

$$a(x; \frac{\partial u}{\partial x} y v) + \frac{\partial}{\partial x} a(x; u, v) y = \frac{\partial l}{\partial x} (x; v) y \quad .$$

Soit d'autre part une fonctionnelle

$$j(x) = J(x; u(x))$$

on a

$$\frac{dj}{dx} y = \frac{\partial J}{\partial x} (x; u(x)) y + \left\langle \frac{\partial J}{\partial u} (x; u(x)), \frac{\partial u}{\partial x} y \right\rangle_{V', V} \quad .$$

Introduisons l'équation (d'état adjoint)

$$(3.5) \quad \forall v \in V \quad a(x; v, \lambda) = \left\langle \frac{\partial J}{\partial u} (x; u(x)), v \right\rangle$$

analogue à l'équation d'état avec un autre second membre.

Cette équation a un sens dès que $\frac{\partial J}{\partial u}$ est dans V' et que l'on sait résoudre l'équation d'état avec un tel second membre ; c'est naturellement le cas dans les exemples cités ci-dessus. Si a est symétrique l'ordre de v et λ est sans importance.

On remarque alors que

$$\left\langle \frac{\partial J}{\partial u}(x; u(x)), \frac{\partial u}{\partial x} y \right\rangle = - a(x; \frac{\partial u}{\partial x} y, \lambda)$$

d'où avec l'équation d'état dérivée :

$$\left\langle \frac{\partial J}{\partial u}(x; u(x)), \frac{\partial u}{\partial x} y \right\rangle = + \frac{\partial a}{\partial x}(x; u, \lambda) y - \frac{\partial \ell}{\partial x}(x; \lambda) y$$

d'où

Proposition 3.1

Soit l'équation d'état

$$\forall v \in V \quad a(x; u, v) = \ell(x, v)$$

pour la valeur x d'une variable de conception si la fonction implicite $x \rightarrow u(x)$ est dérivable de X dans V (voir section 3.5.) la fonctionnelle $j(x) = J(x; u(x))$ a une dérivée donnée par :

$$\frac{\partial j}{\partial x} y = \frac{\partial J}{\partial x}(x; u(x)) \cdot y + \frac{\partial a}{\partial x}(x; u(x), \lambda(x)) \cdot y - \frac{\partial \ell}{\partial x}(x, \lambda(x)) \cdot y$$

où l'état adjoint λ est solution de :

$$\forall x \in V \quad a(x; v, \lambda) = - \left\langle \frac{\partial J}{\partial u}(x; u(x)), v \right\rangle .$$

Corollaire 3.1

$$\text{Si } J = \frac{1}{2} a(x; u(x), u(x))$$

$$\frac{\partial j}{\partial x} y = \frac{\partial \ell}{\partial x}(x, u(x)) y - \frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial x}(x; u(x), u(x)) y .$$

En effet on constate que $\lambda = -u$ pour cette fonctionnelle.

Proposition 3.2

Soit

$$\mathcal{L}(x; u, \lambda) = J(x; u) + a(x; u, \lambda) - \ell(x; \lambda)$$

l'équation d'état est donnée par :

$$\forall v \in V \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x; u, \lambda) v = 0$$

l'équation d'état adjointe par :

$$\forall v \in V \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(x; u, \lambda) v = 0$$

et la dérivée de la fonctionnelle par rapport aux variables de conception :

$$\frac{dj}{dx} y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x; u, \lambda) \cdot y .$$

Cette proposition se déduit immédiatement de la proposition 3.1.

Remarque 3.4

Le principe de l'introduction d'un Lagrangien pour calculer la dérivée d'une fonctionnelle par rapport à des variables de conception est très général ; dans le cadre de l'optimisation de domaines voir Céa, Rousselet dans l'école INRIA [1983].

Remarque 3.5

Pour une fonctionnelle $J = \sup |u(\xi)|$ le résultat est plus délicat. On n'a en général que des dérivées directionnelles (Rousselet [1982]).

f - Explicitons les exemples ci-dessus : Il suffit de calculer la dérivée $\frac{\partial J}{\partial u}$, les dérivées par rapport aux variables de conception sont triviales sauf pour le cas de l'arche qui fait l'objet de la section suivante.

La poutre en flexion

Equation d'état adjoint

$$(3.6) \quad \forall v \in V \quad \int_0^l E \alpha h^2 v'' \lambda'' d\xi = - \frac{\partial J}{\partial u} \cdot v$$

Exemples de fonctionnelles :

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2} \int_0^l (u)^2 d\xi & J_2 &= \frac{1}{2} \int_0^l E \alpha h^2 (\dot{u}'')^2 \equiv a(x; u, v) \\ J_3 &= u(\xi_0) \equiv [\delta_{\xi_0}, u] & J_4 &= E \beta \sqrt{h} u''(\xi_0) \equiv E \beta \sqrt{h} [\delta_{\xi_0}'', u] \end{aligned}$$

Notons que J_4 est directement lié au moment de flexion : posons e épaisseur et h aire de la section droite on a avec β constante géométrique :

$$J_4 = \frac{M}{I} \frac{e}{2} = E u'' \beta \sqrt{h}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} - \left\langle \frac{\partial J_1}{\partial u}, v \right\rangle &= - \int_0^l u v d\xi \\ - \left\langle \frac{\partial J_2}{\partial u}, v \right\rangle &= - \int_0^l E \alpha e^2 u'' v'' = - a(x; u, v) \end{aligned}$$

(on est dans le cas du corollaire 3.1 : $\lambda = -u$)

$$\begin{aligned} - \left\langle \frac{\partial J_3}{\partial u}, v \right\rangle &= - v(\xi_0) = - [\delta_{\xi_0}, v] \\ - \left\langle \frac{\partial J_4}{\partial u}, v \right\rangle &= - E \beta \sqrt{h} v''(\xi_0) = - E \beta [\delta_{\xi_0}'', v] \sqrt{h}(\xi_0) \end{aligned}$$

Le calcul de $\frac{dj_i}{dx} \cdot y$ pour $i = 1, 2, 3, 4$ s'en déduit aisément avec la proposition 3.1 ou 3.2.

La plaque en flexion

Equation d'état adjoint :

$$(3.7) \quad \forall v \in V \quad \iint_{\Omega} D(x) [(1-v)v_{,\alpha\beta} \lambda_{,\alpha\beta} + vv_{,\alpha\alpha} \lambda_{,\beta\beta}] d\xi^1 d\xi^2 = - \langle \frac{\partial J}{\partial u}, v \rangle .$$

Considérons les exemples analogues de fonctionnelles :

$$J_1 = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (u)^2 d\xi^1 d\xi^2$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} D(x) [(1-v)(u_{,\alpha\beta})(u_{,\alpha\beta}) + vu_{,\alpha\alpha} u_{,\beta\beta}] d\xi^1 d\xi^2 \equiv \frac{1}{2} a(x; u, v)$$

$$J_3 = u(\xi_0) = [\delta_{\xi_0}, u]$$

prenons enfin le critère de Von Mises

$$J_4 = [(\sigma^{11} + \sigma^{22})^2 + 3(\sigma^{11} - \sigma^{22})^2 + 12(\sigma^{12})^2](\xi_0) .$$

(on pourrait naturellement considérer un autre critère de plasticité avec sur la surface de la plaque

$$\sigma^{11}(u) = - \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} (u_{,11} + \nu u_{,22})$$

$$\sigma^{22}(u) = - \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} (u_{,22} + \nu u_{,11})$$

$$\sigma^{12}(u) = - \frac{Eh}{2(1-\nu)} u_{,12} .$$

On a donc :

$$- \langle \frac{\partial J_1}{\partial u}, v \rangle = - \iint_{\Omega} uv d\xi^1 d\xi^2$$

$$- \langle \frac{\partial J_2}{\partial u}, u \rangle = - \iint_{\Omega} D(x) [(1-v)u_{,\alpha\beta} v_{,\alpha\beta} + \nu u_{,\alpha\alpha} v_{,\beta\beta}] d\xi^1 d\xi^2 .$$

Notons que l'on est dans le cas du corollaire 3.1 : $\lambda = -u$

$$- \langle \frac{\partial J_3}{\partial u}, v \rangle = - v(\xi_0)$$

$$\begin{aligned} - \langle \frac{\partial J_4}{\partial u}, v \rangle = & - [2(\sigma^{11}(u) + \sigma^{22}(u))(\frac{\partial \sigma^{11}}{\partial u} v + \frac{\partial \sigma^{22}}{\partial u} v) \\ & + 6(\sigma^{11}(u) - \sigma^{22}(u))(\frac{\partial \sigma^{11}}{\partial u} v - \frac{\partial \sigma^{22}}{\partial u} v) + 24 \sigma^{12}(u) \frac{\partial \sigma^{12}}{\partial u} v](\xi_0) . \end{aligned}$$

Toutes ces expressions sont évaluées en ξ_0 et l'on a bien sûr $\frac{\partial \sigma^{ij}(u)}{\partial u} v = \sigma^{ij}(v)$ d'où

$$- \left\langle \frac{\partial J_4}{\partial u}, v \right\rangle = - [2(\sigma^{11}(u) + \sigma^{22}(u)) (\sigma^{11}(v) + \sigma^{22}(v)) + 6(\sigma^{11}(u) + \sigma^{22}(u)) (\sigma^{11}(v) + \sigma^{22}(v)) + 24 \sigma^{12}(u) \sigma^{12}(v)](\xi_0)$$

On remarque que cette dernière fonctionnelle est bien un élément de V' puisque pour u dans V on a $\sigma^{ij}(u) \in L^2(\Omega)$.

L'élasticité plane

L'équation d'état adjoint :

$$(3.8) \quad \forall v \in V \quad \iint_{\Omega} D(x) [(1-\nu) \gamma_{\alpha\beta}(v) \gamma_{\alpha\beta}(\lambda) + \nu \gamma_{\alpha\alpha}(v) \gamma_{\beta\beta}(\lambda)] d\xi^1 d\xi^2 = - \left\langle \frac{\partial J}{\partial u}, v \right\rangle.$$

Considérons les exemples suivants :

$$J_1 = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (u, u) d\xi^1 d\xi^2$$

$$J_2 = \frac{1}{2} a(x; u, v)$$

$$J_3 = (u(\xi_0), u(\xi_0))$$

$$J_4 = [(\sigma^{11})^2 + (\sigma^{22})^2 + 3(\sigma^{12})^2 - \sigma^{11} \sigma^{12}]^{1/2}(\xi_0)$$

(critère de Von Mises) en axes orthonormés avec :

$$\sigma^{\alpha\alpha} = \frac{E\nu}{1-\nu^2} \gamma_{\beta\beta} + \frac{E}{1+\nu} \gamma_{\alpha\alpha}$$

$$\sigma^{12} = \frac{E}{1+\nu} \gamma_{12}$$

Comme $\gamma_{\alpha\beta}$ est linéaire en u on a donc $\frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}(u)}{\partial u} \cdot v = \sigma^{\alpha\beta}(v)$.

Les calculs se mènent de façon analogue au cas de la plaque en flexion.

3.2. Etat adjoint dans le cas de l'arche en flexion

Les manipulations algébriques sont un peu plus compliquées tout au moins en ce qui concerne la variation de la surface moyenne.

Indiquons une subtilité : le vecteur u est décomposé dans une base (a_1, a_3) qui dépend du paramétrage ϕ de la surface moyenne. Ce sont ses composantes qui apparaissent dans la forme bilinéaire donnée dans le paragraphe 3.1.d. Cette présentation est classique. Dans la définition du second membre de l'équation d'état adjoint nous avons donc le choix entre dériver J par rapport aux composantes de u ou bien par rapport au vecteur u lui-même.

C'est la première méthode qui a été utilisée dans Chenais-Rousselet-Benedict [1984] avec des notations un peu différentes. L'extension au cas des coques a été réalisée par Chenais [1986]. Nous utilisons ici la deuxième méthode, ce qui semble diminuer un peu le volume du calcul. Le cas des coques sera présenté dans Bernadou-Rousselet [1986] ; pour les coques de révolution Boisserie-Glowinski [1978].

Avec ces précisions l'équation d'état adjoint s'écrit :

$$(3.9) \quad \forall v \in V \quad a(x; v, \lambda) = - \left\langle \frac{\partial J}{\partial u}, v \right\rangle$$

où a est donnée par la formule (3.4).

Voici quelques exemples de fonctionnelles :

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^l u \cdot u \sqrt{a} \, d\xi$$

$$J_2 = \frac{1}{2} a(x; u, u)$$

$$J_3 = \frac{1}{2} (u \cdot u)(\xi_0) = \frac{1}{2} \langle \delta_{\xi_0}, u \cdot u \rangle$$

$$J_4 = \bar{\rho}_{11}(u)(\xi_0)$$

On trouve facilement

$$\left\langle \frac{\partial J_1}{\partial u}, v \right\rangle = \int_0^l u \cdot v \sqrt{a} \, d\xi$$

$$\left\langle \frac{\partial J_3}{\partial u}, v \right\rangle = u(\xi_0) \cdot v(\xi_0) .$$

Le calcul de la dérivée de J_2 (et de J_4) n'est pas immédiat puisque ces fonctionnelles sont exprimées à partir des coordonnées de u . Nous avons la même difficulté pour dériver la forme a .

On va exprimer γ et ρ à partir du vecteur u .

Lemme 3.1 : Soit $u = u_1 a^1 + u_3 a^3$. On a

$$u_{,1} = u_{1||1} a^1 + u_{3||1} a^3$$

avec

$$u_{1||1} = u_{1|1} - b_{11} u_3 \quad (\text{où } u_{1|1} = u_{1,1} - \Gamma u_1)$$

$$u_{3||1} = u_{3,1} + u_1 b_1^1$$

et donc

$$\gamma_{11} = a_1 \cdot u_{,1} = u_{1||1}$$

On a de même

$$u_{,1}^1 = u_{1||1}^1 a_1 + u_{3||1}^1 a^3$$

avec

$$u_{1||1}^1 = u_{1|1}^1 - b_1^1 u_3 \quad (\text{où } u_{1|1}^1 = u_{,1}^1 + u_1 \Gamma)$$

et donc

$$\gamma_1^1 = a^1 \cdot u_{,1} = u_{1||1}^1$$

Lemme 3.2 : Dans les mêmes conditions on a

$$u_{,11} = u_{1||1} a^1 + u_{3||11} a^3$$

avec

$$u_{1||11} = u_{1,11} - 2\Gamma u_{1,1} + \Gamma \Gamma u_1 - b_1^1 b_{11} u_1 - \Gamma_{,1} u_1 + \\ + u_3 b_{11} \Gamma - u_3 b_{11,1} - 2u_{3,1} b_{11}$$

$$u_{3||11} = u_{3,11} - u_3 b_{11} b_1^1 - \Gamma b_1^1 u_1 + u_1 b_{1,1}^1 + 2u_{1,1} b_1^1$$

et l'on a

$$\rho_{11} = u_{,11} \cdot a_3 - \Gamma(u_{,1} \cdot a_3) - b_1^1(u_{,1} \cdot a_1)$$

et

$$\bar{\rho}_{11} = u_{,11} \cdot a_3 - \Gamma(u_{,1} \cdot a_3)$$

donc

$$\rho_{11} = \bar{\rho}_{11} - b_1^1(u_{,1} \cdot a_1)$$

Démonstration

Le premier lemme est immédiat à vérifier ainsi que l'expression de $u_{,11}$. On obtient ensuite facilement :

$$u_{,11} \cdot a_3 = \rho_{11} + (u_{1,1} - b_{11} u_3) b_1^1 + \Gamma u_{3,1}$$

or on a

$$u_{,1} \cdot a_1 = u_{1,1} - b_{11} u_3 - \Gamma u_1$$

$$u_{,1} \cdot a_3 = u_{3,1} + u_1 b_1^1.$$

On en déduit l'expression de ρ_{11} . D'autre part comme $\bar{\rho}_{11} = \rho_{11} + b_1^1 \gamma_{11}$ on obtient l'expression indiquée pour $\bar{\rho}$. \square

On va maintenant énoncer dans un lemme la dérivée par rapport à une variation de la surface moyenne de différents éléments qui interviennent dans la forme bilinéaire.

Lemme 3.3 : on a

- (i) $\frac{\partial}{\partial \phi} a_1 \cdot \psi = \begin{bmatrix} \psi_{,1}^1 \\ \psi_{,1}^2 \end{bmatrix} = \psi_{,1}$
- (ii) $\frac{\partial}{\partial \phi} a \cdot \psi = 2\phi_{,1} \cdot \psi_{,1} = 2a_{1,1} \cdot \psi_{,1} = 2(a^1 \cdot \psi_{,1}) a$
- (iii) $\frac{\partial}{\partial \phi} a_3 \cdot \psi = - (a_3 \cdot \psi_{,1}) a^1$
- (iv) $\frac{\partial}{\partial \phi} a^1 \cdot \psi = - (a^1 \cdot \psi_{,1}) a^1 + \frac{1}{a} (a_3 \cdot \psi_{,1}) a_3$
- (v) $\frac{\partial}{\partial \phi} a_{1,1} \cdot \psi = \psi_{,11}$
- (vi) $\frac{\partial}{\partial \phi} \Gamma \cdot \psi = - \Gamma (a^1 \cdot \psi_{,1}) + \frac{b_{11}}{a} (a_3 \cdot \psi_{,1}) + a^1 \cdot \psi_{,11}$
- (vii) $\frac{\partial}{\partial \phi} b_1^1 \cdot \psi = - 2b_1^1 (a^1 \cdot \psi_{,1}) - \frac{\Gamma}{a} (a_3 \cdot \psi_{,1}) + \frac{a_3}{a} \cdot \psi_{,11}.$

En effet

- (i) immédiat en notant que $a_1 = \begin{bmatrix} \phi_{,1}^1 \\ \phi_{,1}^2 \end{bmatrix}$
- (ii) immédiat en notant que $a = (\phi_{,1}^1)^2 + (\phi_{,1}^2)^2$
- (iii) $a_3 \cdot a_1 = 0$ fournit $(\frac{\partial a_3}{\partial \phi} \cdot \psi) \cdot a_1 = - a_3 \cdot \psi$
 $a_3 \cdot a_3 = 1$ fournit $(\frac{\partial a_3}{\partial \phi} \cdot \psi) \cdot a_3 = 0$
d'où le résultat.
- (iv) La formule s'obtient en dérivant $a^1 = \frac{1}{a} a_1$
ou en utilisant $a^1 \cdot a_1 = 1$ et $a^1 \cdot a_3 = 0$.
- (v) immédiat puisque $a_{1,1} = \begin{bmatrix} \phi_{,11}^1 \\ \phi_{,22}^2 \end{bmatrix}$
- (vi) nous partons de $\Gamma = a_{1,1} \cdot a^1$.

On a donc

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \Gamma \cdot \psi = \left(\frac{\partial a^1}{\partial \phi} \cdot \psi \right) \cdot a_{1,1} + a^1 \cdot \left(\frac{\partial a_{1,1}}{\partial \phi} \cdot \psi \right)$$

or

$$a_{1,1} = \Gamma a_1 + b_{11} a_3$$

donc

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \phi} \cdot \psi = - (a^1 \cdot \psi_{,1}) \Gamma + \frac{b_{11}}{a} (a_3 \cdot \psi_{,1}) + a^1 \cdot \psi_{,11}$$

(vii) On utilise de même $b_1^1 = a_{1,1} \cdot a_3 = \frac{1}{a} (a_{1,1} \cdot a_3)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \phi} b_1^1 \cdot \psi \right) = - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial a}{\partial \phi} \cdot \psi \right) (a_{1,1} \cdot a_3) + \frac{1}{a} \psi_{,11} \cdot a_3 - \frac{1}{a} (a_{1,1} \cdot a^1) (a_3 \cdot \psi_{,1})$$

ou

$$\left(\frac{\partial}{\partial \phi} b_1^1 \cdot \psi \right) = - \frac{2}{a^2} (\phi_{,1} \cdot \psi_{,1}) b_{11} + \frac{1}{a} \psi_{,11} \cdot a_3 - \frac{1}{a} \Gamma (a_3 \cdot \psi_{,1})$$

d'où le résultat annoncé puisque $\phi_{,1} = a_1$.

□

Proposition 3.3

Si le vecteur u est constant, on a :

$$(i) \quad \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial \phi} \cdot \psi = u_{,1} \cdot \psi_{,1}$$

$$(ii) \quad \frac{\partial \bar{\rho}_{11}}{\partial \phi} \cdot \psi = (a_3 \cdot \psi_{,1}) - [(u_{,11} - \Gamma u_{,1}) \cdot a^1 - b_1^1 (u_{,1} \cdot a_3)] \\ + [\Gamma (a^1 \cdot \psi_{,1}) - a^1 \cdot \psi_{,11}] (a_3 \cdot u_{,1})$$

$$(iii) \quad \frac{\partial \rho_{11}}{\partial \phi} \cdot \psi = (a_3 \cdot \psi_{,1}) [-u_{,11} \cdot a^1 + 2\Gamma (u_{,1} \cdot a^1) - 2b_1^1 (u_{,1} \cdot a_3)] \\ + (a^1 \cdot \psi_{,1}) [b_1^1 (u_{,1} \cdot a_1) + \Gamma (u_{,1} \cdot a_3)] - \\ - (a^1 \cdot \psi_{,11}) (u_{,1} \cdot a_3) - (a_3 \cdot \psi_{,11}) (u_{,1} \cdot a_1) .$$

En effet le (i) est immédiat puisque d'après le lemme 3.1 $\gamma_{11} = u_{,1} \cdot a_1$ et le lemme 3.3(i) fournit la dérivée de a_1 .

Pour le (ii) on utilise le lemme 3.2 :

$$\bar{\rho}_{11} = u_{,11} \cdot a_3 - \Gamma (u_{,1} \cdot a_3) = (u_{,11} - \Gamma u_{,1}) \cdot a_3$$

et le lemme 3.3(iii) et (vi) pour obtenir

$$\frac{\partial \bar{\rho}_{11}}{\partial \phi} \cdot \psi = (\Gamma (a^1 \cdot \psi_{,1}) - b_1^1 (a_3 \cdot \psi_{,1}) - a_{,1} \cdot \psi_{,11}) (u_{,1} \cdot a_3) \\ - (u_{,11} - \Gamma u_{,1}) (a_3 \cdot \psi_{,1}) a^1$$

ou

$$\frac{\partial \bar{\rho}_{11}}{\partial \phi} \cdot \psi = (a_3 \cdot \psi_{,1}) [-(u_{,11} - \Gamma u_{,1}) \cdot a^1 - b_1^1(u_{,1} \cdot a_3)] + \\ [\Gamma(a^1 \cdot \psi_{,1}) - (a_{,1} \cdot \psi_{,11})](u_{,1} \cdot a_3) .$$

Pour (iii) on utilise encore le lemme 3.2 :

$$\rho_{11} = \bar{\rho}_{11} - b_1^1(u_{,1} \cdot a_1)$$

et le lemme 3.3(i) et (vii) :

$$\frac{\partial \rho_{11}}{\partial \phi} \cdot \psi = (a_3 \cdot \psi_{,1}) [-(u_{,11} - \Gamma u_{,1}) \cdot a^1 - b_1^1(u_{,1} \cdot a_3)] \\ + [\Gamma(a^1 \cdot \psi_{,1}) - (a^1 \cdot \psi_{,11})](u_{,1} \cdot a_3) \\ - [-2b_1^1(a^1 \cdot \psi_{,1}) - \Gamma(a_3 \cdot \psi_{,1}) + \frac{a_3}{a} \cdot \psi_{,11}](u_{,1} \cdot a_1) - b_1^1(u_{,1} \cdot \psi_{,1})$$

$$\frac{\partial \rho_{11}}{\partial \phi} \cdot \psi = (a_3 \cdot \psi_{,1}) [-(u_{,11} - 2\Gamma u_{,1}) \cdot a^1 - b_1^1(u_{,1} \cdot a_3)] \\ + (a^1 \cdot \psi_{,1}) [2b_1^1(u_{,1} \cdot a_1) + \Gamma(u_{,1} \cdot a_3)] \\ - (a^1 \cdot \psi_{,11})(u_{,1} \cdot a_3) - (a_3 \cdot \psi_{,11})(u_{,1} \cdot a^1) - b_1^1(u_{,1} \cdot a_1)(a^1 \cdot \psi_{,1}) \\ - b_1^1(u_{,1} \cdot a_3)(a_3 \cdot \psi_{,1})$$

d'où l'expression annoncée.

Proposition 3.4

Pour la forme bilinéaire de l'arche en flexion :

$$a(x; u, v) = \int_0^l [C \gamma_{11}(u) \gamma_{11}(v) + D \rho_{11}(u) \rho_{11}(v)] \frac{1}{a^{3/2}} d\xi$$

avec

$$x = (e, \phi) \quad C = Eeh \quad \text{et} \quad D = \frac{Ee^3}{12} h, \quad \text{on a avec } y = (\epsilon, \psi) :$$

$$\frac{\partial a}{\partial x}(x; u, v) \cdot y = \int_0^l \left[\frac{\partial C}{\partial e} \cdot \epsilon \gamma_{11}(u) \gamma_{11}(v) + \frac{\partial D}{\partial e} \cdot \epsilon \rho_{11}(u) \rho_{11}(v) \right] \frac{1}{a^{3/2}} d\xi \\ - 3 \int_0^l [C \gamma_{11}(u) \gamma_{11}(v) + D \rho_{11}(u) \rho_{11}(v)] \frac{1}{a^{3/2}} (a^1 \cdot \psi_{,1}) d\xi \\ + \int_0^l C \left[\left(\frac{\partial \gamma_{11}(u)}{\partial \phi} \cdot \psi \right) \gamma_{11}(v) + \gamma_{11}(u) \left(\frac{\partial \gamma_{11}(v)}{\partial \phi} \cdot \psi \right) \right] \frac{1}{a^{3/2}} d\xi \\ + \int_0^l D \left[\left(\frac{\partial \rho_{11}(u)}{\partial \phi} \cdot \psi \right) \rho_{11}(v) + \rho_{11}(u) \left(\frac{\partial \rho_{11}(v)}{\partial \phi} \cdot \psi \right) \right] \frac{1}{a^{3/2}} d\xi$$

avec

$$\frac{\partial C}{\partial e} \cdot \epsilon = Eeh \quad \frac{\partial D}{\partial e} \cdot \epsilon = \frac{Ee^2 eh}{4}$$

$$\frac{\partial \gamma_{11}}{\partial \phi} \cdot \psi \quad \text{et} \quad \frac{\partial \rho_{11}}{\partial \phi} \cdot \psi \quad \text{sont donnés dans la proposition 3.3.}$$

Ce résultat est une conséquence immédiate de la proposition 3.3.

□

Avant d'aborder l'expression des dérivées des fonctionnelles, il reste à préciser la dérivée $\frac{\partial \ell}{\partial x}$; pour calculer cette dérivée il faut en fait préciser comment le chargement dépend de la géométrie. Nous considérons trois cas qui peuvent être combinés :

a. poids propre : $p = - \rho g e_3$

$$\ell_1(x;v) = - \int_0^l \rho g e(v.e_3) \sqrt{a} d\xi$$

b. pression : $p = - p^3 a_3$

$$\ell_2(x;v) = - \int_0^l p^3(v.a_3) \sqrt{a} d\xi$$

c. force sur le bord :

$$\ell_3(x;v) = (p.v)(l) .$$

Lemme 3.4 : dans les trois cas indiqués ci-dessus on a avec $y = (\psi, \epsilon)$

$$\frac{\partial \ell_1}{\partial \phi}(x;v).y = - \int_0^l \rho g e(v.e_3) \sqrt{a} d\xi - \int_0^l \rho g e(v.e_3)(a^1.\psi,1) \sqrt{a} d\xi$$

$$\frac{\partial \ell_2}{\partial \phi}(x;v).y = \int_0^l p^3(v.a^1)(a_3.\psi,1) \sqrt{a} d\xi - \int_0^l p^3(v.a_3)(a^1.\psi,1) \sqrt{a} d\xi$$

$$\frac{\partial \ell_3}{\partial x}(x;v).y = 0 \text{ (dans le cas d'une extrémité fixe).}$$

Proposition 3.5

Pour les fonctionnelles indiquées au début de la section on a, en utilisant la proposition 3.1 et en posant

$$j_i(x) = J_i(x;u(x)) \quad i = 1,3,4 \quad \text{et } y = (\psi, \epsilon)$$

$$\frac{dj_i}{dx}.y = \frac{\partial J_i}{\partial x}(x;u(x)).y + \frac{\partial a}{\partial x}(x;u(x),\lambda_i(x)).y - \frac{\partial \ell}{\partial x}(x;\lambda(x)).y$$

avec

$$\frac{\partial J_1}{\partial x}.y = \frac{1}{2} \int_0^l (u.u)(a^1.\psi,1) \sqrt{a} d\xi$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial x}.y = 0$$

$$\frac{\partial J_4}{\partial x}.y = 0 .$$

avec $\frac{\partial a}{\partial x}$ donné dans la proposition 3.4 ; $\frac{\partial \ell}{\partial x}$ calculé pour l'exemple de chargement considéré (voir 3 exemples dans le lemme 3.4) et λ état adjoint solution de

$$a(x;v,\lambda_i) = - \left\langle \frac{\partial J_i}{\partial u}, v \right\rangle$$

avec

$$\left\langle \frac{\partial J_1}{\partial u}, v \right\rangle = \int_0^l u \cdot v \sqrt{a} \, d\xi$$

$$\left\langle \frac{\partial J_3}{\partial u}, v \right\rangle = u(\xi_0) \cdot v(\xi_0)$$

$$\left\langle \frac{\partial J_4}{\partial u}, v \right\rangle = v_{,11} \cdot a_3 - \Gamma(v_{,1} \cdot a_3) \cdot$$

Cette proposition résulte directement des propositions 3.1 et 3.4 et du lemme 3.4. \square

En ce qui concerne la fonctionnelle J_2 on a :

Proposition 3.6

Soit la fonctionnelle

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_0^l [C(\gamma_{11}(u))^2 + D(\rho_{11}(u))^2] \frac{1}{a^{3/2}} \, d\xi \equiv \frac{1}{2} a(x; u, u)$$

on a

$$\left\langle \frac{\partial J_2}{\partial u}, v \right\rangle = \int_0^l [C\gamma_{11}(u)\gamma_{11}(v) + D\rho_{11}(u)\rho_{11}(v)] \frac{1}{a^{3/2}} \, d\xi$$

l'état adjoint de cette fonctionnelle est donc

$$\lambda = -u \cdot$$

C'est immédiat en utilisant les expressions de γ_{11} et ρ_{11} des lemmes 3.1 et 3.2. \square

Proposition 3.7

Soit $j_2(x) = J_2(x; u(x))$ on a

$$\frac{dj_2}{dx} \cdot y = -\frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial x}(x; u(x), u(x)) \cdot y + \frac{\partial l}{\partial x}(x; u(x)) \cdot y$$

où

$\frac{\partial a}{\partial x}$ est donné dans la proposition 3.4

$\frac{\partial l}{\partial x}$ est à calculer suivant les exemples de chargement (voir les exemples dans le lemme 3.4).

Le résultat est immédiat avec le corollaire 3.1. \square

4. OPTIMISATION SANS CONTRAINTES

Nous quittons dans ce chapitre les problèmes de conception optimale pour préciser quelques résultats de base en optimisation sans contraintes. Dans les chapitres suivants nous introduisons des contraintes dans les problèmes d'optimisation ; nous verrons alors comment utiliser les résultats du chapitre précédent pour obtenir des conditions d'optimalité et des algorithmes pour l'optimisation de structures.

4.1. Rappels d'algèbre linéaire et de calcul différentiel

Conditions d'optimalité

Nous étendons dans cette section le résultat bien connu pour les fonctions d'une variable réelle : si $x \rightarrow f(x)$ atteint un minimum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \geq 0$ (sous réserve de l'existence de ces dérivées).

L'extension en vue (tout à fait classique) consiste à considérer le cas d'une fonction (de plusieurs variables) $J : V_n \rightarrow \mathbb{R}$ où V_n est un espace vectoriel de dimension n ; l'exemple de base est

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - l(v)$$

où a est une forme quadratique sur V_n et l est une forme linéaire ; on pourrait considérer des fonctions plus compliquées.

Rappels de notations tensorielles

Si g_i ($i=1, \dots, n$) est une base de V_n on pose (avec la convention des indices répétés)

$$v = v^i g_i \quad l_i = l(g_i) \text{ si bien que } l(v) = l_i v^i$$

$$A_{ij} = a(g_i, g_j) \text{ si bien que } a(v,v) = A_{ij} v^i v^j.$$

Notons que si (u,v) désigne un produit scalaire sur V_n (V_n est alors dit euclidien) on a :

$$(u,v) = u^i v^j g_i g_j = u^i v^j g_{ij}$$

où l'on a posé

$$g_{ij} = (g_i, g_j).$$

Soit V_n^* le dual de V_n : l'espace vectoriel des formes linéaires sur V_n . On désigne par g^{*i} la base de V_n^* , dite duale de la base g_i , qui satisfait

$$\langle g^{*i}, g_j \rangle_{V' \times V} \equiv g^{*i}(g_j) = \delta_j^i \text{ symbole de Kronecker.}$$

On a

$$v = \langle g^{*i}, v \rangle g_i$$

et on a donc

$$l(v) = l(g_i) v^i = l(g_i) \langle g^{*i}, v \rangle$$

c'est à dire

$$l = l(g_i) g^{*i} = l_i g^{*i}.$$

Identification d'un espace vectoriel euclidien et de son dual : on démontre de façon élémentaire (et c'est classique)

Théorème 4.1

L'application de $V \xrightarrow{\phi} V^*$ définie par $u \mapsto u^*$ définie par $\langle u^*, v \rangle_{V' \times V} = (u, v)$ est un

isomorphisme d'espace vectoriel.

On désigne par g^i la base de V dont l'image par ϕ est g^{*i} .

Désignons par p le vecteur de V associé à l par cet isomorphisme

$$l(v) = (p, v)$$

on a

$$(p, v) = p^j v^i g_{ij}$$

on a donc

$$l_i = p^j g_{ij}.$$

On vérifie aussi facilement que

$$g_i = g_{ij} g^j$$

et que si l'on pose

$$g^{ij} = (g^i, g^j)$$

les matrices (g^{ij}) et (g_{ij}) sont inverses l'une de l'autre et que

$$g^i = g^{ij} g_j.$$

En d'autres termes : le calcul de la base duale revient à inverser une matrice.

Si l'on désigne par \mathcal{A}^* l'application linéaire de V dans V' telle que

$$\langle \mathcal{A}^* u, v \rangle = a(u, v)$$

et \mathcal{A} de V dans V telle que

$$(\mathcal{A}u, v) = a(u, v)$$

on a

$$A_{ij} = a(g_i, g_j) = \langle \mathcal{A}^* g_i, g_j \rangle, \quad A_{ij} \text{ est la matrice de } \mathcal{A}^*$$

$$\langle \mathcal{A}^* u, g_i \rangle = (A_{ij} u^j)$$

c'est donc que

$$\mathcal{A}^* u = A_{ij} u^j g^{*i}$$

$$A_{ij} = a(g_i, g_j) = (\mathcal{A} g_i, g_j)$$

$$(\mathcal{A}u, g_i) = u^j A_{ij}$$

où

$$u = A_{ij} u^j g^i$$

mais si l'on veut exprimer $\mathcal{A}u$ dans la même base que u :

$$\mathcal{A}u = A_{ij} u^j g^{ik} g_k$$

on pose

$$A_j^k = A_{ij} g^{ik}$$

si bien que

$$u = A_j^k u^j g_k.$$

Dans le cas où l'espace V n'est plus de dimension finie mais est de Hilbert on a des résultats analogues. Il faut toutefois considérer ici l'espace V des formes linéaires continues sur V . L'isomorphisme entre V et V' est assurée par le théorème de Riez et l'association d'un opérateur A bijectif et bicontinu de V dans V à une forme bilinéaire continue coercitive sur V est assurée par le théorème de Lax-Milgram (voir par exemple CÉa [1971] ainsi que pour des compléments sur cette section).

Dans le cadre Hilbertien la situation de base est encore

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \ell(v)$$

où a est une forme bilinéaire continue coercitive sur V et ℓ une forme linéaire continue.

Quatre exemples issus de la mécanique ont été cités dans la section 3.1., nous y reviendrons plus loin.

Rappelons qu'une fonction est dite dérivable du sens de Gateaux si

(i) d'une part, pour tout $u \in V$, $v \in V$ le quotient $\frac{J(u+\theta v)-J(u)}{\theta}$ admet une limite lorsque $\theta \rightarrow 0$; on note $J'(u,v) = \frac{\partial J}{\partial u} v$ cette limite.

(ii) d'autre part, $v \rightarrow J'(u,v)$ est linéaire continue.

Cette définition vise à étendre en dimension infinie la notion de dérivée partielle ; on dérive ici dans une direction v . Il existe de nombreuses variantes sur la notion de dérivée (Céa [1971], Ioffe et Tihomirov [1979] par exemple).

On vérifie facilement que si

$$J(u) = \frac{1}{2} a(u,u) - l(u)$$

$$J'(u,v) = a(u,v) - l(v) .$$

On a :

Proposition 4.2

Soit u un minimum local de $v \rightarrow J(v)$, si v est différentiable (au sens de Gateau) alors

(i) on a

$$\forall v \in V \quad \frac{\partial J}{\partial u} . v = 0$$

(ii) si de plus J est 2 fois différentiable

$$\forall v \in V \quad \frac{\partial^2 J}{\partial u^2} (v,v) \geq 0 .$$

En effet

(i) comme u est un minimum local

$$J(u+\theta v) - J(u) \geq 0$$

et donc en divisant par θ et en passant à la limite $\frac{\partial J}{\partial u} . v \geq 0$ d'où l'égalité à zéro en changeant v en $-v$.

(ii) écrivons la formule de Taylor à l'ordre deux

$$J(u+\theta v) = J(u) + \theta J'(u,v) + \frac{\theta^2}{2} J''(u;v,v) + o(\theta^2) \geq 0$$

d'après le (i) en un minimum local on a donc

$$J(u+\theta v) - J(u) = \frac{\theta^2}{2} J''(u;v,v) + o(\theta^2) \geq 0$$

d'où le résultat en divisant par θ^2 et en faisant tendre θ vers zéro.

□

Remarque 4.1

La condition (i) n'est naturellement pas suffisante comme le montre l'exemple $f(x) = x^3$; une hypothèse suffisante pour un minimum local isolé est

$$\frac{\partial^2 J}{\partial u^2}(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$$

avec $\alpha > 0$.

Remarque 4.2

$$\text{Si } J(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - l(u) \text{ , } \frac{\partial J}{\partial u} \cdot v = a(u, v) - l(v) \text{ , } \frac{\partial^2 J}{\partial u^2}(v, v) = a(v, v)$$

la condition d'optimalité revient au système linéaire

$$A_{ij} u^j = l_i \text{ ou } A_j^k u^j = p^k \text{ et à la positivité de la forme bilinéaire.}$$

Dans le cas où $\frac{1}{2} a(u, u)$ représente une énergie de déformation en élasticité linéaire, la minimisation de $J(v)$ est le principe du minimum de l'énergie potentielle. La condition (i) s'identifie alors au principe des travaux virtuels. La condition

$$\frac{\partial^2 J}{\partial u^2}(u, v) \geq \alpha \|v\|^2$$

s'écrit

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$$

c'est la coercitivité. Elle est en général réalisée lorsque l'on a inclu dans l'espace V les conditions aux limites de type cinématique (voir les exemples de la section 3.1.).

En éléments finis la coercitivité est, en général, acquise lorsque l'on a éliminé les degrés de liberté bloqués (c'est à dire quand K est la matrice de rigidité réduite).

Le principe du minimum de l'énergie potentielle est valable en élasticité non linéaire pour les milieux hyperélastiques (cf. Valid [1977, Chap. 1]).

4.2. Principe du choix de la direction de descenteDéfinition 4.1

On dit que w est une direction de descente au point u si pour $\theta > 0$ assez petit :

$$J(u + \theta w) < J(u) \text{ .}$$

Proposition 4.3

Si J est différentiable, w est une direction de descente si et seulement si

$$J'(u, w) < 0.$$

En effet la formule de Taylor donne :

$$J(u + \theta w) - J(u) = +\theta J'(u, w) + O(\theta)$$

pour θ assez petit le signe du second membre est celui de $J'(u, w)$.

□

Rappel : dérivée et gradient

Lorsque l'on travaille en dimension finie et dans un repère orthonormé $w = w^i e_i$ $u = u^i e_i$

$$J'(u, w) = \sum w^i J'(u, e_i) = \sum w^i \frac{\partial J}{\partial u^i}$$

si bien que $J'(u, w)$ est égal au produit scalaire de w par $G(u) = \sum \frac{\partial J}{\partial u^i} e_i$ (le gradient de J).

Lorsque l'on ne dispose pas d'un repère orthonormé il convient de distinguer la forme linéaire

$$w \rightarrow J'(u, w)$$

et le vecteur

$$G = \text{grad } J(u)$$

défini par $(G, w) = J'(u, w)$ le vecteur G est celui associé à la forme linéaire par le théorème 4.1 rappelé ci-dessus : on a

$$G^i = g^{ij} \frac{\partial J}{\partial u^j}.$$

Dans un espace de Hilbert le lien entre J' et G se fait par le théorème de Riez (cf. par exemple CÉa [1971]).

Exemple d'une fonctionnelle quadratique

$$J(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - l(u)$$

on a vu ci-dessus que

$$J(u, w) = a(u, w) - l(w).$$

En dimension finie on a vu que si p désigne le vecteur associé à l : $(p, w)_V = l(w)$ et \mathcal{A} l'opérateur de V dans V associé à la forme a : $(\mathcal{A}u, w)_V = a(u, w)$ on a

$$p = p^j g_j \quad \text{avec} \quad p^j g_{ij} = l(g_i)$$

$$\text{et} \quad \mathcal{A}u = A_{jk}^k u^j g_k \quad \text{avec} \quad A_{jk}^k g^{ij} = a(g_i, g_j)$$

On a donc

$$G = (A_j^k u^j - p^k) g_k$$

c'est à dire

$$G^k = A_j^k u^j - p^k$$

alors que

$$\frac{\partial J}{\partial u^j} = a(u, g_j) - l(g_j) = A_{ij} u^j - l_j.$$

Corollaire 4.1

Si J est différentiable, w est une direction de descente si et seulement si w fait un angle obtus avec le gradient :

$$(G(u), w) < 0.$$

En effet

$$J'(u, w) = (G(u), w) = \|G(u)\| \|w\| \cos \theta < 0$$

d'où $\cos \theta < 0$, c'est à dire θ obtus et réciproquement.

□

Corollaire 4.2

Si J est différentiable, la direction de plus grande descente est donnée par

$$w = -G(u)/\|G(u)\|.$$

En effet comme

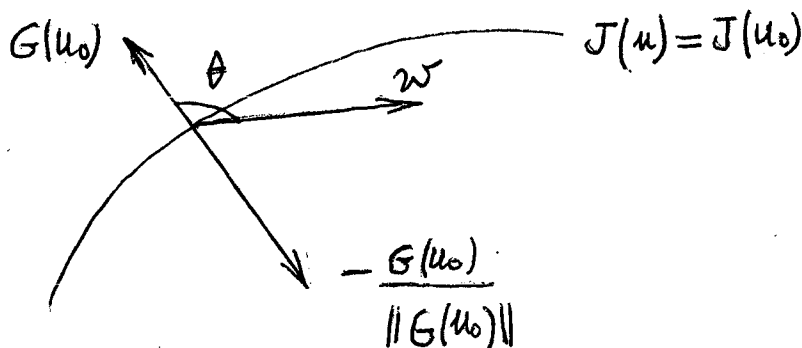
$$J'(u, w) = (G(u), w) = \|G(u)\| \|w\| \cos \theta$$

pour $\|w\| = 1$, $J'(u, w)$ est minimum pour $\cos \theta = -1$, c'est à dire w opposé à $G(u)$ d'où le résultat.

□

Remarque 4.3

Cette méthode dite aussi du gradient constitue le meilleur choix local (on n'a utilisé que l'information de la dérivée première). En général ce choix est mauvais près du minimum ainsi que pour les "vallées étroites".



Une fois que l'on a choisi une direction de descente le passage d'un itéré au suivant suppose la détermination d'un point dans cette direction (voir dans la section suivante). Il est naturel de choisir ρ tel que $\theta \rightarrow J(u+\theta w)$ soit proche du minimum pour $\theta = \rho$.

Proposition 4.4

Si $\theta \rightarrow J(u+\theta w)$ est minimum en $\theta = \rho$ alors on a

$$(G(u+\rho w), w) = 0.$$

La démonstration est immédiate en dérivant $\theta \rightarrow J(u+\theta w)$. □

Remarque 4.4

Dans le cas où l'on choisit $w = -G(u)$ on a

$$(G(u-\rho G(u)), G(u)) = 0.$$

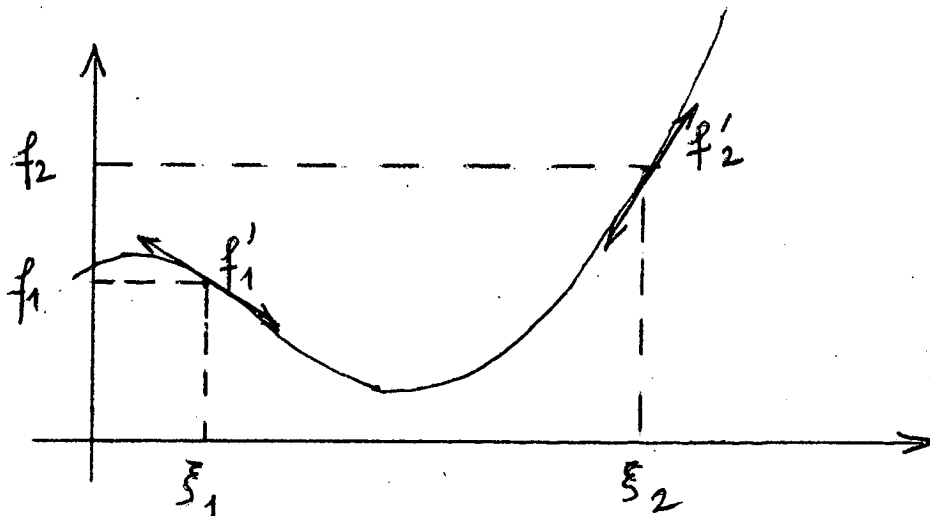
On voit que deux directions de descentes successives sont orthogonales. Cette propriété explique en partie le mauvais comportement de la méthode du gradient en présence d'une "vallée étroite".

En revanche dans le cas où les surfaces de niveau sont des sphères, la méthode du gradient donne le minimum en une itération.

4.3. Algorithmes de minimisation unidimensionnelle

Il existe de nombreux algorithmes de minimisation unidimensionnelle (voir Céa [1971], Fleury [1982], Minoux [1983]).

L'algorithme de l'interpolation cubique semble bien adapté aux problèmes de conception optimale. Il consiste à partir de la donnée d'une fonction f et de sa dérivée f' en deux points à calculer le minimum de la cubique déterminée par ces quatre valeurs (f_1, f_2, f'_1, f'_2) (cf. Fleury [1982]).



5. OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES

Nous abordons maintenant le cas où l'on cherche à minimiser (ou maximiser) une fonctionnelle avec des contraintes. Après un exemple explicite nous indiquons les conditions nécessaires d'optimalité avec introduction de multiplicateurs de Lagrange. Nous esquissons ensuite une classification des problèmes d'optimisation avec contraintes. Nous terminons en indiquant comment les multiplicateurs donnent une obtention simple et rigoureuse du calcul des réactions en analyse des structures puis nous explicitons les conditions nécessaires d'optimalité en conception optimale des structures.

Les algorithmes sont étudiés dans le chapitre suivant, puis la dualité au chapitre 7.

5.1. Un exemple introductif

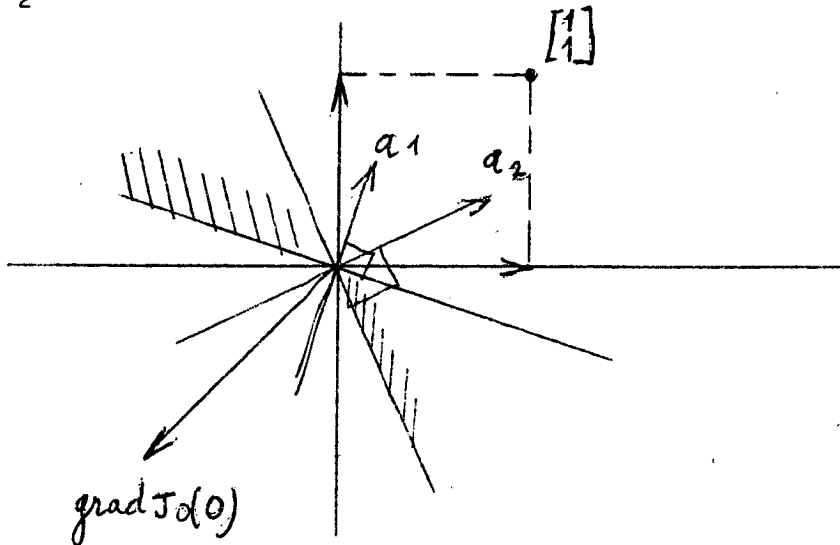
Considérons la minimisation de la fonction de deux variables réelles

$$J_0(x) = \frac{1}{2} [(x^1 - 1)^2 + (x^2 - 1)^2]$$

sous les contraintes

$$(a_1, x) \leq 0 \text{ et } (a_2, x) \leq 0$$

où a_1 et a_2 sont deux vecteurs linéairement indépendants



En l'absence de contraintes le minimum de J est atteint en $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; on voit intuitivement que suivant l'orientation des vecteurs a_1 et a_2 , $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est ou n'est pas un minimum local.

On va voir que :

$0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est un minimum (local) du problème ci-dessus si et seulement si il existe $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ tels que

$$\text{grad} J_0(0) = -\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2.$$

En effet supposons que 0 est un minimum local. On a donc pour tout y qui vérifie $(a_i, y) \leq 0$ pour $i = 1, 2$

$$(5.1) \quad J_0(\theta y) \geq J_0(0, 0) \quad \text{et donc} \quad (\text{grad} J_0(0), y) \geq 0$$

mais comme a_1 et a_2 sont linéairement indépendants

$$\text{grad} J_0(0) = -\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2$$

avec λ_1 et λ_2 de signe quelconque.

Soit alors y tel que $(a_1, y) = 0$ et $(a_2, y) < 0$, on déduit de (5.1) que $\lambda_2 \geq 0$. On obtient de même $\lambda_1 \geq 0$.

Réciproquement si

$$\text{grad} J_0(0) = -\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2$$

avec $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_2 \geq 0$ on a

$$(\text{grad} J_0(0), y) \geq 0$$

pour y admissible et donc avec la proposition 4.3 toute direction admissible est de montée, on est donc bien en un minimum local.

□

Remarque 5.1

Géométriquement la condition signifie que $\text{grad} J_0$ est "entre" les vecteurs $-a_1$ et $-a_2$ (c'est à dire dans le cône engendré).

Remarque 5.2

Dans cet exemple, il est clair que l'on a caractérisé un minimum global mais cela est dû à la convexité de J_0 .

5.2. Conditions d'optimalité en programmation non linéaire

a - conditions du premier ordre

On considère d'abord le cas où l'on minimise une fonctionnelle sur un ensemble convexe.

Théorème 5.1

Si J est Gateau dérivable dans un ensemble convexe U et si $u \in U$ est un minimum global de J sur U alors

$$\forall v \in U \quad J'(u, v-u) \geq 0.$$

En effet, la convexité de U entraîne que pour tout $v \in U$, $u + \theta(v-u) \in U$ et l'on a par hypothèse

$$J(u + \theta(v-u)) - J(u) \geq 0$$

d'où le résultat en divisant par θ et en faisant tendre θ vers zéro.

□

Remarque 5.3

Si J est convexe la conditions ci-dessus est suffisante (Céa [1971], Ciarlet [1982]).

Corollaire 5.1

En dimension finie si $U = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$

si $u = (u_1, \dots, u_n)$ est un minimum alors

$$\text{si } a_i < u_i < b_i \quad \frac{\partial J}{\partial u_i} = 0$$

$$\text{si } u_i = a_i \quad \frac{\partial J}{\partial u_i} \geq 0$$

$$\text{si } u_i = b_i \quad \frac{\partial J}{\partial u_i} \leq 0.$$

En effet, en utilisant le théorème dans le premier cas avec $v_j = u_j$ pour $j \neq i$ et $v_i \neq u_i \in [a_i, b_i]$ quelconque

$$J'(u, v-u) = \frac{\partial J}{\partial u_i} (v_i - u_i) \geq 0$$

donne le résultat en prenant $v_i > u_i$ puis $v_i < u_i$.

Dans le deuxième cas on prend $v_j = u_j$ pour $j \neq i$ on remarque que si $v_i \in [a_i, b_i]$, on a $v_i - u_i > 0$ d'où le résultat.

On utilise la même méthode pour le troisième cas.

□

Remarque 5.4

Ces contraintes de borne sont très fréquentes en optimisation de structures.

En dehors du cas particulier de ce corollaire, la condition nécessaire d'optimalité indiquée dans le théorème n'est pas très maniable à cause du pour tout $v \in U$.

On va maintenant indiquer un théorème dans lequel le domaine des contraintes n'est pas nécessairement convexe mais dans lequel il est décrit par des inégalités.

On considère le problème de programmation non linéaire (P.N.L.)
Minimiser $J_0(v)$ pour $v \in V$ sous les contraintes

$$v \in V_{ad} = \{v \in V \mid J_i(v) = 0, i=1, \dots, m; J_i(v) \leq 0, i=m+1, \dots, m+n\}.$$

Définition 5.7

On dit que $v_0 \in V_{ad}$ est régulier si les contraintes sont continûment différentiables en v_0 et si les

$$\frac{\partial J_i}{\partial v}(v_0) \quad (\text{pour } i=1, \dots, m)$$

et les

$$\frac{\partial J_i}{\partial v}(v_0) \quad (\text{pour } i=m+1, \dots, m+n \text{ et } J_i(v_0) = 0)$$

sont linéairement indépendantes.

Remarquons bien que la condition d'indépendance linéaire n'est à réaliser que pour les contraintes actives; on exclut les points v_0 où deux contraintes actives seraient tangentes entre elles.

Le résultat suivant est connu sous le nom de conditions de Kuhn et Tucker.

Théorème 5.2

On considère le problème (P.N.L.) indiqué ci-dessus; on suppose que J_0 est continûment différentiable: soit v^* un minimum local de J_0 dans V_{ad} ; si v^* est un point régulier de V_{ad} , alors il existe des multiplicateurs de Lagrange λ_i^* ($i=1, \dots, m+n$) tels que

$$(5.2) \quad \begin{cases} \lambda_i^* J_i(v^*) = 0 \\ \lambda_i^* \geq 0 \end{cases} \quad \text{pour } i=m+1, \dots, m+n$$

et tels que :

$$(5.3) \quad \forall w \in V \quad \frac{\partial J_0}{\partial v}(v^*)w + \sum_{i=1}^{m+n} \lambda_i^* \frac{\partial J_i}{\partial v}(v^*)w = 0.$$

La démonstration est indiquée en annexe.

□

Remarque 5.3

La condition $\lambda_i^* J_i(v^*) = 0$ entraîne que le multiplicateur $\lambda_i^* = 0$ dans le cas où $J_i(v^*) < 0$; en l'absence de contraintes d'égalités et si $J_i(v^*) < 0$ pour $i=m+1, \dots, m+n$ on retrouve la condition d'optimalité du cas sans contraintes :

$$J'_0(v_*)w = 0.$$

La condition (5.3) peut naturellement s'écrire :

$$(5.4) \quad \frac{\partial J_0}{\partial v}(v^*) + \sum_{i=1}^{m+n} \lambda_i^* \frac{\partial J_i}{\partial v}(v^*) = 0.$$

La quantité $\mathcal{L}(v, \lambda) = J_0(v) + \sum \lambda_i J_i(v)$ dont on a écrit $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = 0$ interviendra d'un autre point de vue dans le chapitre consacré à la dualité.

Le cas du corollaire 5.1 peut se retrouver comme conséquence du présent théorème en posant

$$J_k^-(v) = v_k - b_k \quad \frac{\partial J_k^-}{\partial v_j} = \delta_{kj}$$

$$J_k^+(v) = b_k - v_k \quad \frac{\partial J_k^+}{\partial v_j} = -\delta_{kj}$$

si l'on a $J_k^-(v_*) = 0$ prenons $v_j = 0$ $w_k = +1$ il vient

$$+ \frac{\partial J_0}{\partial v_i}(v^*) + \lambda_i^* = 0 \text{ et donc } \frac{\partial J_0}{\partial v_i} \leq 0.$$

On traiterait de même les autres cas.

Considérons aussi le cas où dans la définition de V_{ad} on a à la fois des contraintes d'inégalités "générales" $J_i(v) \leq 0$ $i=m+1, \dots, m+n$ et de borne $a_k \leq v_k \leq b_k$ $k=1, \dots, N$.

Corollaire 5.2

Soit le problème (P.N.L.) où l'on rajoute dans la définition de V_{ad} $a_k \leq v_k \leq b_k$; sous les hypothèses du théorème 5.2 on peut remplacer (5.3) par

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_k} &\equiv \frac{\partial J_0}{\partial v_k}(v^*) + \sum \lambda_i^* \frac{\partial J_i}{\partial v_k}(v^*) = 0 & \text{si } a_k < v_k < b_k \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_k} &\geq 0 & \text{si } v_k = a_k \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_k} &\leq 0 & \text{si } v_k = b_k \end{aligned}$$

En effet si $a_{k_0} < v_{k_0} < b_{k_0}$ le multiplicateur de Lagrange associé à ces deux contraintes est nul ; prenons $w_{k_0} = +1$ et $w_k = 0$ pour $k \neq k_0$ on obtient l'égalité indiquée. En revanche si par exemple $v_k = a_k$ il vient avec $\mathcal{L} = J_0 + \sum \lambda_i^* J_i$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_k} - \mu_k^* = 0$$

avec $\mu_k^* \geq 0$ multiplicateur associé à la contrainte $v_k \geq a_k$, d'où le résultat.

□

Dans le cas de l'optimisation sans contraintes, il est bien connu que la nullité de la dérivée n'est pas une condition suffisante pour un minimum local. C'est en revanche le cas si la fonction à minimiser est convexe. Nous avons un résultat analogue avec des contraintes d'inégalités.

Proposition 5.3

Si les fonctions J_i sont convexes pour $i=0, \dots, n$ et si les conditions (5.2) et (5.3) sont satisfaites alors J_0 admet en v_* un minimum dans l'ensemble V_{ad}

$$V_{ad} = \{v \in V \mid J_i(v) \leq 0 \quad i=1, \dots, n\}.$$

Comme J_1 est convexe

$$J_1(v_*) + \frac{\partial J_1}{\partial v}(v_*)(v-v_*) \leq J_1(v)$$

d'où pour $i=0$ avec (5.2)

$$J_0(v_*) - \sum \lambda_i \frac{\partial J_i}{\partial v}(v_*)(v-v_*) \leq J_0(v)$$

d'où avec la relation ci-dessus

$$J_0(v_*) + \sum \lambda_i^* (J_i(v_*) - J_i(v)) \leq J_0(v)$$

et donc avec (5.1)

$$J_0(v_*) - \sum \lambda_i^* J_i(v) \leq J_0(v)$$

d'où si $v \in V_{ad}$ $J_0(v_*) \leq J_0(v)$ ce qu'il fallait démontrer.

□

Remarque 5.4

Si V_{ad} est défini avec en plus des contraintes d'égalité linéaires le résultat subsiste puisque les termes

$$\frac{\partial J_1}{\partial v} (v_*) (v - v_*)$$

sont nuls si v satisfait les contraintes. On peut donc déduire que le principe des travaux virtuels est équivalent au principe du minimum de l'énergie potentielle (toutefois nous n'avons ici abordé cette équivalence que dans le cas des structures discrètes).

En l'absence de convexité on peut établir des conditions nécessaires avec utilisation des dérivées secondes qui généralisent le cas sans contraintes. Ce résultat est plus technique.

5.3. Classification sommaire des problèmes

Nous indiquons brièvement quelques types de problèmes d'optimisation avec contraintes.

Le problème de base est celui de la programmation linéaire : c'est le cas où fonctionnelles et contraintes sont affines (ou linéaires comme on disait autrefois d'où la terminologie). Ces problèmes ont été étudiés de façon intensive et on dispose de programmes standard dans les bibliothèques scientifiques (en particulier méthode du simplexe). Voir par exemple Ciarlet [1982] pour une description de l'algorithme.

Un autre exemple intéressant est celui des contraintes linéaires (ou affines) pour lesquelles on peut adapter les algorithmes du cas sans contraintes. Cela est particulièrement vrai pour les contraintes $a_i \leq x_i \leq b_i$ (appelé parfois quasiment non constraints).

Un problème est dit de programmation convexe lorsque la fonctionnelle est convexe et l'ensemble V_{ad} est un ensemble convexe. C'est le cas de la proposition 5.3 avec sa remarque. C'est le cas où les démonstrations de convergence des algorithmes sont souvent établies (voir par exemple Céa [1971]). La programmation quadratique est un cas particulier où la fonctionnelle est quadratique semi-définie positive et les contraintes linéaires. On peut adapter la méthode du gradient conjugué pour le résoudre en un nombre fini d'itérations (voir par exemple B. Psenicnyi ; Y. Danilin [1977]).

Enfin un dernier exemple est celui de la programmation séparable :

$$J_0(u) = \sum_{i=1}^n J^i(u_i)$$

à minimiser ou les contraintes avec

$$J_k(u) = \sum_{i=1}^n J_k^i(u_i) \quad k=1, \dots, m$$

et

$$u \in \prod_{i=1}^n U_i .$$

Ce type de problème est un intermédiaire lorsque l'on linéarise un problème d'optimisation de structures par rapport aux variables inverses (voir section 8). Il se traite bien par dualité (voir section 7).

5.4. Applications des conditions d'optimalité : analyse et conception optimale des structures

a - Analyse de structures

Pour préciser ces conditions d'optimalité nous allons indiquer comment retrouver le calcul des réactions associées aux degrés de liberté bloqués pour une structure modélisée en éléments finis.

Nous supposons que l'espace des déplacements cinématiquement admissibles est :

$$V_{ad} = \{v \in V \mid v^i = u^i \quad i=1, \dots, m \quad v^i \leq u^i \quad i=m+1, \dots, m+n\} .$$

Le principe du minimum de l'énergie potentielle indique que le déplacement réel v^* de la structure réalise le minimum de

$$J(v) = \frac{1}{2} (Kv, v) - l(v) \text{ dans } V_{ad} ;$$

K est la matrice de rigidité du système et $l(v)$ le travail virtuel des forces extérieures.

Le théorème 5.2 va nous donner une méthode naturelle et générale pour établir le système à résoudre et le calcul des réactions.

Il vient

$$(5.6) \quad \sum_{i,j=1}^N K_{ij} v_j^i - \sum_{i=m+n+1}^N f_i w^i + \sum_{i=1}^m \lambda_i w^i + \sum_{i=m+1}^{m+n} \lambda_i w^i = 0 . \quad |$$

Remarquons d'abord que $\sum K_{ij} v_j^i - f_i w^i$ étant de la dimension d'un travail et w^i d'une longueur, les λ_i sont de la dimension d'une force : c'est l'opposé de la réaction (convention de signe des multiplicateurs de Lagrange).

* Pour simplifier les notations on suppose les équations renumérotées avec les d. l. bloqués dans les premières lignes.

i) supposons maintenant que V_{ad} est défini par les seules égalités $v^i = u^i$. Eliminons les m premières lignes avec $w^i = 0 \quad i=1, \dots, m$ et $w^{i_0} = 1$ successivement pour $i_0 = m+1, \dots, N$ il vient :

$$(5.7) \quad \sum_{j=m+1}^N K_{ij} v^j = f_i - \sum_{j=1}^m K_{ij} u_j \quad i=m+1, \dots, N.$$

C'est un système linéaire à $N-m$ inconnues et $N-m$ équations qui détermine en principe v^j pour $j=m+1, \dots, N$. Une fois v calculé on détermine λ_{i_0} ($i_0=1, \dots, m$) en faisant $w^{i_0} = 1$ d'où

$$(5.8) \quad \sum_{j=1}^N K_{i_0 j} v^j = -\lambda_{i_0} \quad \text{égal à la réaction.}$$

Du point de vue mécanique, (5.6) constitue une forme du principe des travaux virtuels. Dans (5.7) on a pris des déplacements virtuels qui satisfont les conditions cinématiques. En revanche dans (5.8) on a choisi des déplacements virtuels qui font travailler chaque composante de réaction.

ii) Dans le cas où V_{ad} est défini à l'aide de contraintes d'inégalité : on ne peut plus découpler le problème en un système linéaire suivi du calcul des réactions car on ne sait pas quelles contraintes sont saturées. Il convient d'utiliser un algorithme d'optimisation adapté aux contraintes d'inégalités (voir chapitre 6).

Remarquons qu'une approche de ce type de problème via la dualité semble bien adaptée pour étudier également le problème continu : cf. par exemple Céa [1971] § 5.3 et pour un problème élasto-plastique le § 5.4, voir aussi Duvaut-Lions [1972], Ekeland-Temam [1974], Temam [1983].

b - Conception optimale des structures

On revient ici à la question centrale de ce mémoire. On considère une structure régie par l'équation variationnelle (principe des travaux virtuels) : trouver $u \in V$

$$\forall v \in V \quad a(x; u, v) = \ell(x; v)$$

où V est un espace vectoriel de déplacements virtuels discrets ou continus (voir Remarque 2.4 et § 3.1). On suppose pour simplifier que les conditions aux limites de type cinématiques sont homogènes. On n'aborde pas ici la sensibilité avec des conditions aux limites évoquées dans le paragraphe précédent : les conditions de type inégalité $v^i \leq u^i$ amèneraient des complications délicates (Sokolowski [1984]).

On considère donc le problème de conception optimale (P.C.O.) :
Minimiser $J_0(x; u(x))$ sous les contraintes

$$J(x; u) \leq 0$$

et

$$\forall v \in V \quad a(x; u, v) = l(x; v) \quad (\text{équation d'état})$$

où J est une fonction vectorielle à m composantes.

L'hypothèse centrale est que pour tout x dans un ouvert de l'espace de conception X on peut résoudre l'équation d'état. Toutefois comme indiqué dans le § 1, il serait illusoire de considérer ce problème comme un problème de programmation non linéaire par rapport aux seules variables de conception x et maladroit de le considérer comme un problème par rapport aux variables indépendantes x et u sans tenir compte du fait que l'équation d'état permet de calculer u pour toute valeur de x .

En fait en utilisant le principe de l'état adjoint, nous allons pouvoir obtenir des conditions d'optimalité de (P.C.O.) en le considérant implicitement comme un (P.N.L.) par rapport à x .

Théorème 5.4

On suppose que toutes les fonctions qui apparaissent dans (P.C.O.) sont continûment différentiables, soit un optimum local (x^*, u^*) . Supposons que x^* soit un point régulier pour les contraintes $j_i(x) = J_i(x; u(x))$. Posons

$$\mathcal{L}_1(x; u, \lambda_1) = a(x; \lambda_1, u) - l(x; \lambda_1) + J_1(x; u)$$

$$\mathcal{L}(x; u, \lambda_1; \mu_1^*) = \mathcal{L}_0(x; u, \lambda_0) + \sum_{i=1}^m \mu_i^* J_i(x; u, \lambda_1)$$

alors on a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} (x^*; u^*, \lambda_1^*; \mu_1^*) \cdot y = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial u} (x; u, \lambda_1^*) \cdot v = 0 \quad \text{et donc} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} (x; u, \lambda_1^*; \mu_1^*) \cdot v = 0$$

$$\mu_1^* \geq 0$$

$$\mu_1^* J_1(x; u(x)) = 0$$

avec pour tout $i=0, 1, \dots, m$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \lambda_1} (x^*; u^*, \lambda_1^*) \cdot v = 0 \quad (\text{équation d'état}).$$

En effet, la proposition 3.2 fournit

$$\frac{dj_i}{dx} \cdot y = \frac{\partial L_i}{\partial x} (x; u, \lambda_i) \cdot y$$

avec

$$\frac{\partial L_i}{\partial u} (x; u, \lambda_i) \cdot v = 0 \quad .$$

Sous l'hypothèse de régularité : indépendance linéaire de $\frac{\partial j_i}{\partial x}$ ($i=1, \dots, m$ pour les i pour lesquels $j_i(x) = 0$) le théorème 5.2 fournit l'existence des μ_i^* tels que

$$\forall y \in X \quad \frac{\partial j_0}{\partial x} \cdot y + \sum \mu_i^* \frac{\partial j_i}{\partial x} \cdot y = 0$$

qui peut donc encore s'écrire en posant

$$L(x; u, \lambda_i; \mu_i) = L_0(x; u, \lambda_0) + \sum_{i=1}^m \mu_i L_i(x; u, \lambda_i)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} (x^*; u^*, \lambda_i^*; \mu_i^*) \cdot y = 0 \quad .$$

On remarque d'autre part que pour tout i

$$\frac{\partial L_i}{\partial \lambda_i} (x; u, \lambda_i) \cdot v = 0$$

redonne l'équation d'état.

□

Remarque 5.5

Ces conditions nécessaires d'optimalité sont difficiles à utiliser pour calculer un optimum car on ne sait pas a priori quelles contraintes sont actives. Toutefois on peut envisager de les utiliser comme critère d'arrêt : les états adjoints se calculent par résolution de systèmes linéaires, les multiplicateurs de Lagrange peuvent être approchés par certains algorithmes d'optimisation (voir chapitre 6). Pour une utilisation systématique des critères d'optimalité en optimisation de structures, on pourra consulter Morris ed. [1982]. Dans ce même livre Fleury précise le lien entre les méthodes par critère d'optimalité et par algorithmes de programmation non linéaire (voir aussi le chapitre 8 de ce rapport). D'autre part pour un certain nombre de problèmes d'optimisation de structures on arrive à résoudre explicitement les conditions d'optimalité (Banichuk [1983] et sa bibliographie).

6. ALGORITHMES D'OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES

L'objectif de ce chapitre est de préciser une méthode simple et directe d'utilisation des coefficients de sensibilité en conception optimale : le principe de leur calcul a été indiqué dans les chapitres 2 et 3. L'idée consiste grâce à l'utilisation du principe de l'état adjoint à adapter des algorithmes de programmation non linéaire. Il convient de tenir compte de la nature du problème considéré : fonctionnelle et contraintes coûteuses à évaluer puisqu'il faut analyser la structure. En revanche le surcoût de l'évaluation des coefficients de sensibilité n'est pas très important. Toutefois les contraintes sont non linéaires par rapport aux variables de conception, la seule utilisation directe de ces coefficients donne assez simplement une direction qui satisfasse les contraintes linéarisées. Cette direction ne satisfait qu'approximativement (au second ordre près) les contraintes.

6.1. Projection du gradient avec des contraintes linéaires

a - Rappels sur la projection

Nous rappelons quelques propriétés de la projection dans un espace de Hilbert V (Céa [1971] Chapitre 1 pour des démonstrations). Nous considérons le cas d'espaces réels, on pourrait aussi considérer le cas complexe inutile ici.

Théorème 6.1

Soit K un sous-ensemble convexe fermé non vide de V et $u \in V$ alors il existe un unique $w \in K$ tel que

$$\|u-w\| = \inf_{v \in K} \|u-v\| .$$

Définition 6.1

L'élément w introduit dans le théorème 6.1 est appelé la projection de u sur K ; on le note parfois $w = Pu$.

Noter que P est en général un opérateur non linéaire. Si K est un sous-espace vectoriel il est cependant linéaire.

Théorème 6.2

Les trois relations suivantes sont équivalentes :

- (i) $w \in K , \forall v \in K \quad \|u-w\| \leq \|u-v\|$
- (ii) $w \in K , \forall v \in K \quad (u-w, v-w) \leq 0$
- (iii) $w \in K , \forall v \in K \quad (u-v, w-v) \geq 0 .$

Remarque 6.1

La projection de u réalise le minimum de $v \rightarrow \|u-v\|$ et donc de façon équivalente le minimum de $v \rightarrow \|u-v\|^2 = J(v)$. On remarque alors que $J'(w, w-v) = 2(u-w, w-v)$ si bien que (ii) n'est autre que la condition d'optimalité du théorème 5.1. On constate que (ii) et (iii) indiquent que les angles $(u-w, v-w)$ et $(u-w, w-v)$ sont respectivement obtus et aigu.

Proposition 6.1

La projection est une contraction :

$$\|Pu - Pv\| \leq \|u - v\|.$$

La projection sur un ensemble convexe fermé est en général difficile à réaliser.

b - Le cas "quasiment non contraint"

Considérons d'abord dans un espace de dimension finie le cas où

$$K = \prod_{i=1}^N [a_i, b_i] \text{ (manifestement convexe fermé).}$$

Dans la classification du § 5.3 on a désigné la minimisation d'une fonctionnelle sur un tel ensemble par problème "quasiment non contraint". On a vu au corollaire 5.1 que la condition d'optimalité s'écrit simplement.

En utilisant ce corollaire pour la fonctionnelle $J(v) = \|u-v\|^2$ on trouve facilement le résultat suivant.

Proposition 6.2

Soit P la projection sur $K \subset \mathbb{R}^N$ alors on a

$$(Pu)_i = \begin{cases} u_i & \text{si } a_i \leq u_i \leq b_i \\ b_i & \text{si } u_i \geq b_i \\ a_i & \text{si } u_i \leq a_i \end{cases}.$$

On en déduit l'algorithme indiqué ci-dessous.

Algorithme de gradient projeté pour le cas quasiment non contraint

Minimisation d'une fonction $J(x)$ avec $x \in \mathbb{R}^N$ dans

$$K = \{x \in \mathbb{R}^N \mid a_i \leq x_i \leq b_i\}.$$

Soit $x \in K$. Calculer le vecteur G : gradient de $J(x)$. On suppose que les conditions du corollaire 5.1 ne sont pas vérifiées : le test n'est pas satisfait.

Répéter jusqu'à ce que le test soit satisfait

{Détermination de la direction de descente y }

si $x_i = a_i$ et $G_i \geq 0$ alors $y_i = 0$

si $x_i = b_i$ et $G_i \leq 0$ alors $y_i = 0$

sinon $y_i = -G_i$

{Minimisation unidimensionnelle}

$$\text{soit } \rho^+ = \min_{y_i > 0} \frac{b_i - x_i}{y_i}$$

$$\rho^- = \min_{y_i < 0} \frac{a_i - x_i}{y_i}$$

et $\bar{\rho} = \min(\rho^-, \rho^+)$.

Calculer $\frac{d}{d\rho} J(x+\rho y) \Big|_{\rho=\bar{\rho}}$

si la dérivée précédente est strictement négative poser $\rho = \bar{\rho}$

sinon déterminer un point minimisant dans $[0, \bar{\rho}]$; soit ρ ce point.

Dans x mettre $x+\rho y$

Calculer le vecteur G , gradient de $J(x)$

Si les conditions du corollaire 5.1 sont vérifiées : test satisfait

Fin répéter

Commentaires

Commentons d'abord le choix de la direction de descente.

Si $a_i < x_i < b_i$ on a pour ρ assez petit, $a_i < (x-\rho G)_i < b_i$ par suite $(P(x-\rho G))_i = x_i - \rho G_i$ on peut donc prendre $y_i = -G_i$.

si $x_i = a_i$ avec $G_i < 0$ $(x-\rho G)_i > a_i$ on peut donc prendre $y_i = -G_i$. En revanche si $x_i = a_i$ avec $G_i \geq 0$ $(x-\rho G)_i \leq a_i$ par suite $(P(x-\rho G))_i = a_i$, on est donc conduit à poser $y_i = 0$. La discussion est analogue avec $x_i = b_i$.

En ce qui concerne la minimisation unidimensionnelle, le calcul de $\bar{\rho}$ est destiné à ne pas sortir de K . Ensuite suivant le signe de la dérivée de $\rho \rightarrow J(x+\rho y)$ au point $\rho = \bar{\rho}$. Cette fonction est minimum en $\bar{\rho}$ ou en un point intermédiaire. Dans ce dernier cas une approximation de ce minimum est réalisée par un algorithme adéquat (section 4.3).

Remarque 6.2

Cet algorithme interviendra dans les méthodes de dualité.

c - Contraintes linéaires quelconques

On considère maintenant la minimisation de $J_0(x)$ dans le convexe

$K = \{x \in V \mid (\ell_j, x) - b_j \leq 0 \text{ } j=1, \dots, m\}$. Soit $x_0 \in K$, on désigne par $K(x_0)$ l'ensemble analogue à K où l'on ne considère que les inégalités d'indice j pour lesquels on a $(\ell_j, x_0) - b_j = 0$, (contraintes saturées). On désigne par $K_T(x_0) = \{y \in V \mid (\ell_j, y) = 0 \text{ pour } j \text{ associé à une contrainte saturée}\}$ l'espace vectoriel tangent en x_0 .

On désigne par ℓ la matrice constituée par les vecteurs ℓ_1, \dots, ℓ_m $\ell = [\ell_1, \dots, \ell_j, \dots, \ell_m]$ et par ℓ_{x_0} la matrice analogue dans laquelle on ne met que les ℓ_j d'indice j associé à une contrainte saturée en x_0 . En d'autres termes :

$$K_T(x_0) = \{y \in V \mid \ell_{x_0}^T \cdot y = 0\}.$$

Comme dans la section 5.2, on fait une hypothèse de régularité : les colonnes de ℓ_{x_0} sont supposées indépendantes.

On désigne par P l'opérateur de projection sur $K_T(x_0)$. On va indiquer des propriétés de cet opérateur.

Proposition 6.3

Sous les hypothèses et notations précédentes on a :

(i) $P(-\nabla J_0) = -\nabla J_0 - \ell_{x_0} \lambda$

avec $\lambda \in \mathbb{R}^q$ (q contraintes saturées).

(ii) Posons $M = \ell_{x_0}^T \ell_{x_0}$ et soit λ la solution du système linéaire $M\lambda = -\ell_{x_0}^T \nabla J_0$.

(iii) On a :

$$(P(-\nabla J_0), -\nabla J_0) = \|P(-\nabla J_0)\|^2.$$

(iv) Si une des composantes $\lambda_{j_0} < 0$ on peut supprimer la colonne correspondante de ℓ_{x_0} . Soit ℓ'_{x_0} la nouvelle matrice

$$K'_T(x_0) = \{y \in V \mid \ell'^T_{x_0} \cdot y = 0\}$$

et P' la projection sur $K'_T(x_0)$, on a

$$(\ell_{j_0}, P'(-\nabla J_0)) < 0.$$

Démonstration

(i) Suivant la remarque 6.1 $P(-\nabla J_0)$ est le vecteur y qui minimise

$$d_0(y) = \frac{1}{2} \|\nabla J_0 + y\|^2 \text{ pour } y \in K_T(x_0)$$

le théorème 5.2 fournit l'existence de λ_j qui satisfont au minimum (en présence de convexité cette condition est suffisante).

$$\nabla J_0 + y_0 + \sum_{*j} \lambda_j l_j = 0$$

où le \sum_{*j} est pris sur les indices j associés à des contraintes saturées d'où le (i).

(ii) Reprenons l'égalité ci-dessus :

$$\nabla J_0 + y_0 + l_{x_0} \lambda = 0$$

comme y_0 est la projection sur $K_T x_0$ on a :

$$l_{x_0}^T \nabla J_0 + l_{x_0}^T l_{x_0} \lambda = 0$$

d'où le système linéaire à l'inconnue λ cherché. A cause de l'hypothèse de régularité la matrice M est définie positive et λ est uniquement défini par ce système linéaire. Réciproquement avec ce λ y_0 est bien orthogonal à l_{x_0} .

(iii) Comme $P(-\nabla J_0)$ est orthogonal aux colonnes de l_{x_0} on déduit de (i)

$$\|P(-\nabla J_0)\|^2 = (-\nabla J_0, P(-\nabla J_0)) .$$

(iv) Le (i) fournit pour la projection P' :

$$(6.1) \quad P'(-\nabla J_0) = -\nabla J_0 + l'_{x_0} \lambda' \text{ avec } \lambda' \in \mathbb{R}^{q-1}$$

d'autre part le (iii) donne :

$$(6.2) \quad \|P'(-\nabla J_0)\|^2 = -(\nabla J_0, P'(-\nabla J_0)) .$$

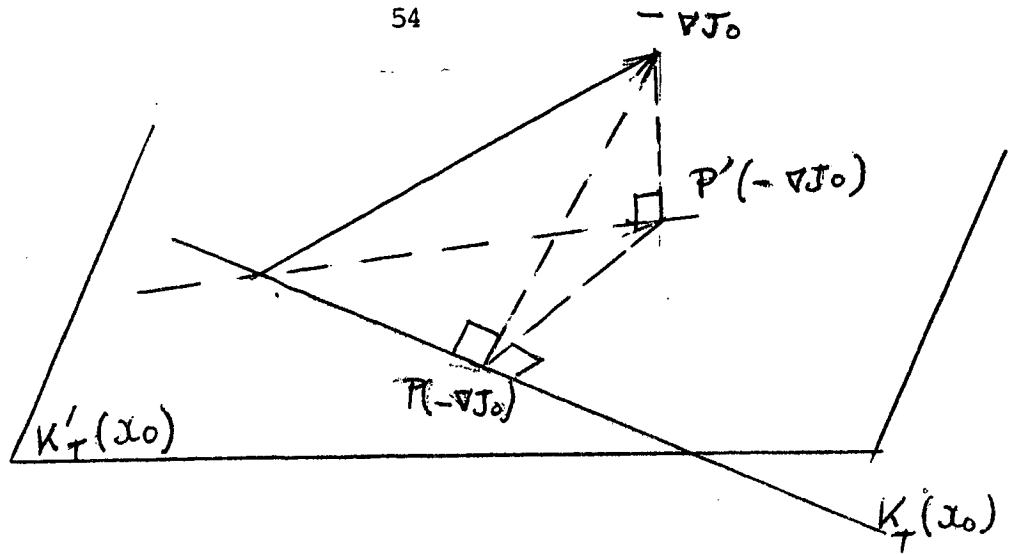
On déduit aussi de la relation (6.1)

$$(P'(-\nabla J_0), P(-\nabla J_0)) = +(-\nabla J_0, P(-\nabla J_0))$$

et donc avec (iii) :

$$(6.3) \quad (P'(-\nabla J_0), P(-\nabla J_0)) = \|P(-\nabla J_0)\|^2$$

résultat bien naturel au vu d'un croquis.



D'autre part on tire encore de (i) :

$$(P(-\nabla J_0), P'(-\nabla J_0)) = + (-\nabla J_0, P'(-\nabla J_0)) - (\lambda_{j_0}, P'(-\nabla J_0)) \lambda_{j_0}$$

d'où avec (6.2) et (6.3) :

$$(6.4) \quad - (\lambda_{j_0}, P'(-\nabla J_0)) \lambda_{j_0} = \|P(-\nabla J_0)\|^2 - \|P'(-\nabla J_0)\|^2.$$

On peut vérifier que le deuxième membre est négatif par suite comme on a supposé que $\lambda_{j_0} < 0$ on en déduit le résultat cherché

$$+ (\lambda_{j_0}, P'(-\nabla J_0)) < 0.$$

□

Commentaires

Le (i) et le (ii) fournissent une méthode de calcul de la projection sur l'espace vectoriel tangent à K en x_0 .

Le (iii) indique que $y_0 = P(-\nabla J_0)$ fait un angle aigu avec $-\nabla J_0$ c'est donc une direction de descente (corollaire 4.1).

D'après le (iv) si λ_{j_0} est négatif on obtient une direction rentrante par rapport à la contrainte $(\lambda_{j_0}, x) - b_{j_0} \leq 0$ en projetant sur $K'_T(x_0)$, c'est à dire en supprimant cette contrainte. Dans le cas extrême d'une seule contrainte, si $\lambda_1 < 0$ on peut supprimer cette contrainte, dans ce cas on a

$$- (\lambda_1, -\nabla J_0) \lambda_1 = \|P(-\nabla J_0)\|^2 - \|-\nabla J_0\|^2.$$

Il est inutile de projeter puisque $-\nabla J_0$ est rentrant par rapport à la contrainte $(\lambda_1, x) - b_1 \leq 0$.

Corollaire 6.1

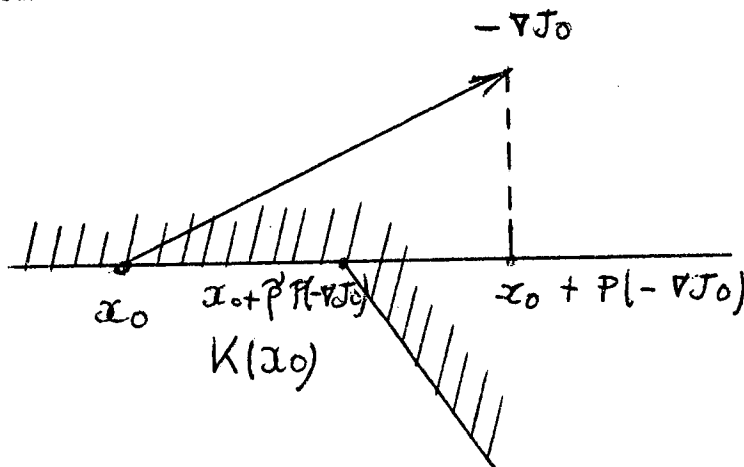
Sous les hypothèses et notations précédentes si $P(-\nabla J_0) = 0$ et si $\lambda \geq 0$ on est en un point qui vérifie les conditions de Kuhn-Tucker pour le problème de minimisation considéré.

En effet l'hypothèse s'écrit :

$$\nabla J_0 + \lambda_{x_0} = 0.$$

Il s'agit bien des conditions d'optimalité du théorème 5.2 avec des notations légèrement différentes. \square

Comme dans le cas non contraint il reste à choisir un point sur la direction de descente. Il convient de noter que $x_\rho = x_0 + \rho P(-\nabla J_0)$ n'est dans K que pour ρ assez petit : les contraintes saturées en x_0 restent satisfaites puisque l'on a projeté sur $K_T(x_0)$ (elles le restent aussi si l'on projette sur $K'_T(x_0)$ comme indiqué dans les commentaires ci-dessus). Cependant les contraintes qui n'étaient pas actives en x_0 peuvent le devenir en x_ρ dès que ρ est assez grand. Le croquis ci-dessous éclaire cette possibilité.



La prise en compte de cette éventualité se fait lors de la détermination de ρ .

Lemme 6.1 : soit pour les indices j de contraintes non actives en x_0 :

$$\alpha_j = - \frac{(l_j, x_0) - b_j}{(l_j, y_0)} \text{ pour } (l_j, y_0) > 0$$

et

$$\tilde{\rho} = \min_j \alpha_j$$

si $x_0 \in K$ alors $x_\rho = x_0 + \rho y_0 \in K$ pour $0 \leq \rho \leq \tilde{\rho}$.

En effet, il suffit de s'assurer que pour les j de contraintes non saturées en x_0 :

$$(l_j, x_0 + \rho y_0) - b_j \leq 0$$

ou

$$(\ell_j, x_0) - b_j + \rho(\ell_j, y_0) \leq 0$$

ce qui donne une condition sur ρ quand $(\ell_j, y_0) > 0$. Dans ce cas on doit avoir :

$$\rho \leq - \frac{(\ell_j, x_0) - b_j}{(\ell_j, y_0)} .$$

□

Remarque 6.3

Dans le cas quasiment non contraint on retrouve le calcul de $\tilde{\rho}$ indiqué dans la section ci-dessus ; la détermination de ρ est identique.

Remarque 6.4

Comme indiqué dans la démonstration de la proposition 6.3, $P(-\nabla J_0)$ réalise le minimum de

$$d_0(y) = \|\nabla J_0\|^2 + 2(\nabla J_0, y) + \|y\|^2$$

dans $K_T(x_0)$.

Si l'on minimise $d_0(y)$ avec la contrainte de normalisation $\|y\|^2 \leq \xi^2$ cela revient à considérer la minimisation de

$$(\nabla J_0, y) \text{ dans } K_T(x_0) \cap \{y \mid \|y\|^2 \leq \xi^2\} .$$

Or la condition d'optimalité de ce nouveau problème s'écrit :

$$(1+2\alpha)y_0 = -\nabla J_0 + \ell_{x_0}\lambda$$

où α est un multiplicateur de Lagrange associé à la nouvelle contrainte. Comme c'était prévisible cela revient à changer la longueur du vecteur y_0 .

Pour le choix de la direction de descente les deux problèmes sont donc équivalents.

Remarque 6.5

Modification de la méthode pour tenir compte d'un point non admissible. Cette modification est utile pour l'extension au cas de contraintes non linéaires.

Supposons que $(\ell_j, x_0) = b_j + \beta_j$ avec $\beta_j \geq 0$ il est alors naturel de chercher y qui minimise :

$$(\nabla J_0, y) \text{ sous les contraintes}$$

$$(\ell_j, y) = -\beta_j$$

$$\|y\| \leq \xi^2 .$$

Le théorème 5.2 fournit encore à l'optimum :

$$\nabla J_0 + 2\alpha y_1 + \ell_{x_0} \lambda = 0$$

d'où avec $M = \ell_{x_0}^T \ell_{x_0}$:

$$M\lambda = -\ell_{x_0}^T \nabla J_0 - 2\alpha \ell_{x_0}^T y_1$$

ou

$$M\lambda = -\ell_{x_0}^T \nabla J_0 - 2\alpha \beta.$$

On a donc $\lambda = \lambda_0 + 2\alpha\lambda_2$ avec λ_0 solution de l'équation $M\lambda_0 = -\ell_{x_0}^T \nabla J_0$ définie dans la proposition 6.3 et λ_2 solution de :

$$M\lambda_2 = +\beta$$

par suite $y_1 = \frac{1}{2\alpha} P(-\nabla J_0) - \ell_{x_0} \lambda_2$ où P est l'opérateur défini dans la proposition 6.3.

Proposition 6.4

Avec les hypothèses et notations ci-dessus : soit $y_2 = -\ell_{x_0} \lambda_2$ avec $M\lambda_2 = \beta$ alors on a :

$$(i) (P(-\nabla J_0), y_2) = 0$$

$$(ii) \ell_{x_0}^T y_2 = -\beta$$

En effet :

(i) $(P(-\nabla J_0), y_2) = (P(-\nabla J_0), \ell_{x_0} \lambda_2)$ qui est donc nul puisque P est la projection orthogonale sur le sous-espace orthogonal à ℓ_{x_0} .

(ii) immédiat avec la définition de M . □

Commentaire

Le point $x = x_0 + y_2$ satisfait donc $\ell_{x_0}^T x = b_j$ il est donc devenu admissible.

Si λ_1 n'est pas trop grand, y_2 est plus petit que $\frac{1}{2\alpha} P(-\nabla J_0)$ et y_1 est une direction de descente avec la proposition 6.3 (iii).

On suggère dans Haug-Aora [1979] de déterminer α de telle façon que $\frac{1}{2\alpha} P(-\nabla J_0)$ donne une réduction (au 1er ordre) donnée de J_0 c'est à dire par exemple

$$\frac{1}{2\alpha} (\nabla J_0, P(-\nabla J_0)) = -0,05 J_0 \text{ (pour } J_0 \geq 0 \text{)}.$$

Nous verrons également une autre méthode dans le cas de contraintes non linéaires.

6.2. Extension au cas de contraintes non linéaires

Au niveau de l'algorithme général nous ne distinguons pas le problème de programmation non linéaire d'un problème de conception optimale. Nous avons vu dans la section 2 pour le cas discret et dans la section 3 pour le cas continu que pour un système régi par une équation variationnelle :

$$\forall v \in V \quad a(x; u, v) = l(x; v)$$

où x est la variable de conception, on pouvait à l'aide d'un état adjoint calculer la dérivée par rapport à la variable de conception de :

$$x \rightarrow j(x) = J(x, u(x)) .$$

Supposons que l'on cherche à minimiser

$J_0(x, u(x))$ sous les contraintes

$$J_i(x, u(x)) \leq 0 \quad i=1, \dots, m .$$

En suivant le § 6.1, on est amené à chercher y_1 qui minimise le problème linéarisé suivant :

$$(6.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial J_0}{\partial x}(x_0, y) \text{ sous les contraintes} \\ \frac{\partial J_i}{\partial x}(x_0, y) \leq -j_i(x_0) \text{ pour les indices } i \text{ correspondant à} \\ \text{des contraintes saturées} \\ \|y\|^2 \leq \xi^2 . \end{cases}$$

Dans ce cas ξ^2 doit être choisi assez petit pour que l'approximation linéaire ci-dessus reste valable. Ce problème est identique à celui considéré ci-dessus, le point minimisant se calcule donc de la même façon.

Toutefois les contraintes considérés ici ne sont pas linéaires et le nouvel itéré ne satisfait pas exactement les contraintes, voir croquis ci-dessous.

Néanmoins si $\frac{1}{2\alpha} y_0$ est assez petit la correction y_2 ramène pratiquement sur la contrainte par suite en approchant de l'optimum comme y_0 doit tendre vers zéro (corollaire 6.1) on se rapproche de plus en plus des contraintes. Pour mieux assurer la prise en compte des contraintes on peut rajouter dans les contraintes du problème linéarisé les inégalités qui correspondent à des indices j pour lesquels $J_1(x, u(x)) = -\epsilon$ (contraintes presque saturées).

Pour mieux assurer les contraintes on peut aussi utiliser la méthode itérative proposée dans Rosen [1961]

$$x_{k+1} = x_k + l_{x_0} \lambda_k$$

où λ_k est solution de $M\lambda_k = -j_{x_0}(x_k)$ où $j_{x_0}(x_k)$ désigne le vecteur de composantes $j_i(x_k)$ pour les indices i qui correspondent à des contraintes actives. Noter que cela revient à itérer la correction y_2 indiquée dans la proposition 6.4. Il convient de vérifier avec cette méthode que le point calculé fait bien décroître la fonctionnelle.

Remarque 6.6

Avant d'indiquer une analyse de la mise en oeuvre de cet algorithme, il convient de noter que le caractère fortement non linéaire et non convexe des problèmes d'optimisation de structures entraîne un risque de non convergence ou de convergence vers un optimum relatif peu intéressant.

De plus les contraintes importantes à prendre en compte ne sont pas toujours clairement identifiées par le concepteur et le nombre de réanalyses à utiliser dans un algorithme automatique d'optimisation peut être très important.

C'est pourquoi on suggère dans HAUG-CHOI-KOMKOV [1986 à paraître] de laisser le soin au concepteur d'utiliser le gradient projeté sur les contraintes linéarisées pour modifier de façon interactive les variables de conception de la structure quitte à lancer ensuite un algorithme automatique après quelques modifications interactives.

Remarque 6.7

On indique dans la section suivante d'autres algorithmes que l'on peut envisager d'utiliser.

Dans le chapitre 8 on verra que l'utilisation des variables inverses permet d'obtenir une approximation des contraintes qui est de meilleure qualité.

6.3. Analyse de l'algorithme de gradient projeté

a - Analyse de l'algorithme en programmation non linéaire

Objet : Minimisation de $J_0(x)$ sous les contraintes $J_i(x) \leq 0 \quad i=1, \dots, m$

1. Estimer x initial ; ϵ
 $ba \leftarrow \text{faux}$ critère $\leftarrow \text{faux}$
2. Calculer $J_0(x), J_i(x)$
3. Former $I = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid J_i(x) \geq -\epsilon\}$; $J = (J_i)_{i \in I}$
4. Calculer $g_0 \leftarrow \nabla J_0$; $l \leftarrow \nabla J$; $\Delta J \leftarrow J(x) \times (\text{pourcentage})$
 {ex. : 0,50}

Répéter jusqu'à ce que le critère soit vrai.

5. Calculer $M \leftarrow l^T l$ et $l^T g_0$
 6. Calculer λ_1 solution de $M\lambda_1 = -l^T g_0$
 7. $y_0 \leftarrow -(g_0 + \lambda_1)$
 8. Si ba est faux alors

$\Delta J_0 \leftarrow -|J_0(x)| \times (\text{pourcent.})$ {ex. pourcentage = 0,05}
 $\alpha \leftarrow -g_0^T y_0 / 2\Delta J_0$; $ba \leftarrow \text{vrai}$
fin de si
 9. Calculer λ_2 solution de $M\lambda_2 = -\Delta J$
Répéter jusqu'à ce que ba soit faux
 10. Calculer $\lambda \leftarrow \lambda_1 + 2\alpha \lambda_2$

si des composantes de λ sont négatives restreindre λ_2 et λ
fin de si
 11. $y_2 \leftarrow -\lambda_2$; $y_1 \leftarrow -\frac{1}{2\alpha} y_0 + y_2$
 12. $x' \leftarrow x + y_1$
 13. Faire tests d'arrêts et réinitialiser
 $(x, x', ba, \text{critère}, J_0(x) \leftarrow J_0(x'), J(x) \leftarrow J(x'), I, l, \Delta J)$
- fin répéter
- fin répéter

Tests d'arrêts et réinitialisation

$(x, x', b\alpha, \text{critère } J_0(x) \rightarrow x, b\alpha, \text{critère}, J_0(x'), J(x'), I, l, \Delta J)$

Calculer $J_0(x')$ et $J_1(x')$ pour $i=0,1,\dots,m$

si $J_0(x') > J_0(x)$ alors {si l'on n'arrive pas à trouver α essayer de diminuer ΔJ }

$\alpha \leftarrow 2\alpha$

sinon $b\alpha \leftarrow \text{faux}$

si [(toutes les contraintes sont satisfaites avec tolérance) et $(\|y_1\| \text{ assez petit})$] alors

afficher x_1 ; critère \leftarrow vrai {arrêt}

sinon

$x \leftarrow x'$

. Former $I = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid J_1(x) \geq -\varepsilon\}$; $J = (J_i)_{i \in I}$

. Calculer $g_0 \leftarrow \nabla J_0$ $l \leftarrow \nabla J$ $\Delta J \leftarrow -J \times \{\text{pourcentage}\}$
{en 0,50}

fin de si

fin de si

b - Adaptation pour la conception optimale

Au point de vue des principes l'analyse présentée dans le paragraphe ci-dessus n'est pratiquement pas à modifier. Cependant, il faut réaliser que pour calculer $J_0(x)$, $J_1(x)$, il convient de résoudre l'équation d'état du système éventuellement avec plusieurs cas de charges et de calculer valeurs propres et modes propres, charges, critiques si les fonctions $J_1(x)$ font intervenir ces quantités.

De même le calcul de ∇J_0 et ∇J_1 doit se faire en utilisant une des méthodes décrites dans les chapitres deux ou trois (méthode de l'espace de conception ou méthode de l'espace d'état. Cette dernière n'est autre que le principe de l'état adjoint).

Voici d'autre part quelques remarques pour améliorer l'efficacité numérique de la méthode (Haug-Aora [1979]).

Les contraintes du problème de conception optimale $J_1(x) \leq 0$ sont par exemple

$$u_j \leq \bar{u}_j$$

$$a_k \leq x_k \leq b_k$$

où u_j désigne un déplacement nodal et x_k une épaisseur dans un élément. Il convient de les normaliser sous la forme

$$\frac{u_j}{u_j} \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{x_k}{b_k} \leq 1 \quad - \frac{x_k}{a_k} \leq 1 .$$

On améliore ainsi le conditionnement des matrices utilisées dans le gradient projeté. On peut ainsi utiliser le même ϵ pour traiter la violation des contraintes.

Les contraintes de borne ont un gradient très simple et donnent lieu à une sous-matrice diagonale (avec +1 ou -1). Il convient de partitionner M et λ afin de diminuer le coût de calcul de ces coefficients.

Enfin dans la description de l'algorithme on a fait une hypothèse de régularité des contraintes : indépendance linéaire des gradients des contraintes saturées. Cette hypothèse peut tomber en défaut : dans ce cas la matrice M est singulière et la détermination de λ n'est pas possible. On peut contourner cette difficulté en résolvant le système linéaire par pivot total. A la fin de l'élimination il reste éventuellement une sous-matrice nulle ou avec des coefficients très petits. Les contraintes dont l'indice correspond à cette sous-matrice sont donc tangentes aux autres (leurs gradients sont dépendants des gradients des autres contraintes). On peut donc les supprimer de l'ensemble des contraintes pour la présente itération.

7. INTRODUCTION A LA DUALITE

On indique dans ce chapitre quelques éléments de base sur la technique de dualité pour les problèmes d'optimisation avec contraintes. On a vu dans le paragraphe 5.2. qu'une condition d'optimalité d'un problème d'optimisation avec contraintes peut s'écrire par $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ où fait intervenir la fonctionnelle, les contraintes et des multiplicateurs de Lagrange.

On va voir que cette condition est en fait la condition d'optimalité d'un problème sans contrainte associé au problème initial ; toutefois pour être utilisable d'un point de vue algorithmique on doit introduire une fonctionnelle duale (fonction de λ) et la maximiser sous les contraintes simples $\lambda \geq 0$. Pour des compléments et d'autres points de vue on pourra consulter par exemple Céa [1971], Ciarlet [1982], Minoux [1983].

7.1. Rappels sur les points cols (ou selles)

Soit $(x, \lambda) \rightarrow L(x, \lambda)$ une fonction de deux arguments $x \in X$ et $\lambda \in \Lambda$ (X et Λ deux ensembles)

Définition 7.1

(x^*, λ^*) est un point col de $L(x, \lambda)$ si et seulement si pour tout $x \in X$ et tout $\lambda \in \Lambda$ on a

$$L(x^*, \lambda) \leq L(x^*, \lambda^*) \leq L(x, \lambda^*) .$$

Remarque 7.1

L'ordre des arguments est essentiel dans cette définition.

La forme du graphe de $(x, \lambda) \rightarrow L(x, \lambda)$ au voisinage d'un point col est analogue en général à celle du relief au voisinage d'un point de même nom en géographie ; on peut toutefois avoir d'autres situations dues au fait que X et Λ ne sont pas en général des espaces vectoriels mais des parties de tels espaces.

Théorème 7.1

Soit la fonction de deux arguments $(x, \lambda) \rightarrow L(x, \lambda)$ avec $x \in X$ et $\lambda \in \Lambda$ alors :

$$(i) \quad \sup_{\lambda \in \Lambda} \inf_{x \in X} L(x, \lambda) \leq \inf_{x \in X} \sup_{\lambda \in \Lambda} L(x, \lambda)$$

(ii) mais si L admet un point selle (x^*, λ^*) on a

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \inf_{x \in X} L(x, \lambda) = L(x^*, \lambda^*) = \inf_{x \in X} \sup_{\lambda \in \Lambda} L(x, \lambda)$$

Démonstration

(i) On a évidemment

$$L(x, \lambda) \leq \sup_{\lambda \in \Lambda} L(x, \lambda)$$

d'où

$$\inf_{x \in X} L(x, \lambda) \leq \inf_{x \in X} \sup_{\lambda \in \Lambda} L(x, \lambda)$$

d'où le résultat en maximisant en λ .

(ii) On a :

$$\inf_{x \in X} \sup_{\lambda \in \Lambda} L(x, \lambda) \leq \sup_{\lambda \in \Lambda} L(x^*, \lambda) = L(x^*, \lambda^*)$$

et

$$L(x^*, \lambda^*) = \inf_{x \in X} L(x, \lambda^*) \leq \sup_{\lambda \in \Lambda} \inf_{x \in X} L(x, \lambda)$$

d'où le résultat annoncé en utilisant le (i). \square

7.2. Dualité par les points cols pour un problème d'optimisation avec contraintes

On considère le problème d'optimisation avec contraintes (problème de programmation non linéaire)

$\inf J_0(x)$ sous les contraintes

$$(P.N.L) \quad J_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$x \in X_{ad} \subset X$$

Dans les applications X est un espace vectoriel et X_{ad} est en général un convexe décrit par des inégalités simples qui sont le plus souvent $a_i \leq x_i \leq b_i$.

On pouvait rajouter ces inégalités aux précédentes et les dualiser ; on verra que c'est sans intérêt car le problème dual est avec des contraintes du même type $\lambda_i \geq 0$; d'autre part on a vu au § 6.1.b qu'il est très simple de projeter sur un tel ensemble.

Toutefois en analyse de structures il peut être intéressant de dualiser de telles contraintes pour évaluer les réactions : on a évoqué cette question au § 5.4.a. comme application des conditions nécessaires d'optimalité.

Définition 7.2

Le Lagrangien associé au (P.N.L.) est

$$L(x, \lambda) = J_0(x) + (\lambda, J(x))$$

où l'on a posé

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} \quad J(x) = \begin{bmatrix} J_1(x) \\ \vdots \\ J_m(x) \end{bmatrix}$$

$L(x, \lambda)$ est défini sur l'ensemble x utilisé dans la définition de (P.N.L.) et

$$\Lambda = \{ \lambda \in \mathbb{R}^m \mid \lambda_i \geq 0 \quad i=1, \dots, m \}.$$

Le signe des composantes de λ est lié au sens des inégalités utilisées dans la définition du (P.N.L.).

On a la caractérisation suivante des points cols du Lagrangien associé au (P.N.L.).

Théorème 7.2

Si $(x^*, \lambda^*) \in X_{ad} \times \Lambda$ est un point col du Lagrangien associé au (P.N.L.) si et seulement si :

- (i) $L(x^*, \lambda^*) = \inf_{x \in X} L(x, \lambda^*)$
- (ii) $J_i(x^*) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$
- (iii) $\lambda_i^* J_i(x^*) = 0 \quad (\text{et donc } L(x^*, \lambda^*) = J_0(x^*))$.

Démonstration

(i) C'est l'inégalité de droite de la définition 7.1. Il suffit donc de montrer l'équivalence entre l'inégalité de gauche de la définition 7.1. et le (ii) avec le (iii).

Supposons donc :

$$J_0(x^*) + \sum_i \lambda_i^* J_i(x^*) \leq J_0(x^*) + \sum_i \lambda_i^* J_i(x^*)$$

C'est à dire

$$(7.1) \quad \sum_i \lambda_i^* J_i(x^*) \leq \sum_i \lambda_i^* J_i(x^*)$$

Si $\lambda_{i_0}^* = 0$ faisons

$$\lambda_{i_0}^* = 1 \text{ et } \lambda_i = 0 \text{ pour } i \neq i_0$$

on obtient $J_{i_0}(x^*) \leq 0$.

Si $\lambda_{i_0}^* \neq 0$ faisons

$$\lambda_{i_0}(x^*) = 2 \lambda_{i_0}^* \text{ et } \lambda_i = 0 \text{ pour } i \neq i_0$$

on obtient encore $J_{i_0}(x^*) \leq 0$ d'où le (ii) : mais alors comme

$$J_i(x^*) \leq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, m$$

on tire de (7.1) comme $\lambda_i \geq 0$:

$$0 \leq \sum \lambda_i^* J_i(x^*)$$

mais comme

$$\lambda_i^* \geq 0 \text{ et } J_i(x^*) \leq 0$$

on obtient

$$\lambda_i^* J_i(x^*) = 0 \text{ d'où le (iii).}$$

Réciproquement : supposons (ii) et (iii), on a donc pour $\lambda \geq 0$

$$\sum_i \lambda_i J_i(x^*) \leq 0 = \sum_i \lambda_i^* J_i(x^*)$$

d'où

$$L(x^*, \lambda) \leq L(x^*, \lambda^*)$$

c'est à dire l'inégalité de gauche de la définition 7.1. \square

Remarque 7.2

Les conditions d'optimalité du théorème 5.2. dans le cas où X_{ad} est un espace vectoriel (et celles du corollaire 5.2. dans le cas où

$$X_{ad} = \prod_{i=1}^m [a_i, b_i])$$

ne sont autres que la condition d'optimalité du problème de minimisation sans contraintes : $\inf_{x \in X_{ad}} L(x, \lambda^*)$ (ou quasiment non contraint si

$X_{ad} = \prod [a_i, b_i])$ et les conditions identiques (ii) et (iii).

Du point de vue algorithmique cette formulation n'est pas très utilisable car on ne connaît pas les multiplicateurs de Lagrange mais nous allons voir qu'on peut les approcher par itération en résolvant un problème associé dit dual.

Définition 7.3

Soit $L(x, \lambda)$ le Lagrangien associé au P.N.L. ; posons

$$\ell(\lambda) = \inf_{x \in X_{ad}} L(x, \lambda).$$

Le problème suivant est dit dual (au sens de Falk) du P.N.L. que l'on qualifie alors de primal :

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \ell(\lambda)$$

Sans aucune hypothèse supplémentaire, nous avons d'abord le résultat simple suivant :

Proposition 7.3 ("propriété faible de dualité")

Avec les hypothèses et notations des définitions 7.2. et 7.3. Si x^* est un point minimisant de P.N.L. on a pour tout $\lambda \in \Lambda$ $\ell(\lambda) \leq J_0(x^*)$.

En effet par définition de $\ell(\lambda)$, on a pour tout $x \in X_{ad}$ et $\lambda \in \Lambda$ $\ell(\lambda) \leq J_0(x^*) + (\lambda, J(x))$ mais comme $J(x^*) \leq 0$ et $\lambda \geq 0$ on a bien $\ell(\lambda) \leq J_0(x^*)$ d'où le (i). \square

Remarque 7.3

Avant d'indiquer des résultats plus détaillés sur le lien entre problème primal et dual faisons quelques remarques.

Comme le problème primal, le problème dual est un problème d'optimisation avec contraintes ; toutefois l'intérêt numérique de cette transformation est que ces contraintes sont faciles à traiter numériquement : c'est un problème quasiment non contraint (c.f. § 5.3.) ; il est très facile de projeter sur cet ensemble de contraintes (c.f. § 6.1.b).

On réalise aussi que du point de vue numérique, il est sans intérêt de dualiser les contraintes de bornes $a_i \leq x_i \leq b_i$ ($i=1, \dots, m$) ; le calcul de $\ell(\lambda)$ se ferait en minimisant sans contraintes mais le vecteur λ aurait $2n$ composantes de plus.

Remarque 7.4

Dans le cas de problèmes séparables (§ 5.3.) le problème dual est particulièrement simple à calculer. Rappelons qu'ils consistent à minimiser

$$J_0(x) = \sum_{i=1}^n J_0^i(x_i) \text{ sans les contraintes}$$

$$J_k(x) \leq 0 \text{ avec } J_k(x) = \sum_{i=1}^n J_k^i(x_i)$$

$$x \in X_{ad} \quad \text{avec } X_{ad} = \prod_{i=1}^n X_{adi}.$$

J_0^i et J_k^i ne dépendent que de la variable x_i de même indice.

Dans ces conditions

$$l(\lambda) = \inf_{x \in X_{ad}} (J_0(x) + \sum_k \lambda^k J_k(x))$$

$$l(\lambda) = \inf_{x \in \Pi X_{adi}} (\sum_i J_0^i(x_i) + \sum_{k,i} \lambda^k J_k^i(x_i))$$

et donc :

$$l(\lambda) = \sum_i \inf_{x_i \in X_{adi}} (J_0^i(x_i) + \sum_k \lambda^k J_k^i(x_i))$$

$l(\lambda)$ se calcule donc à partir de minimisation unidimensionnelle (§ 4.3.) (voir le § 8.2. pour l'application à l'optimisation de structures).

Voici maintenant deux théorèmes qui précisent le lien entre problème primal et dual ; alors qu'en toute généralité, on a vu que la résolution du problème dual donne une minoration du minimum de la fonctionnelle, si l'on sait, a priori, que le Lagrangien associé admet un point col alors on a égalité entre le minimum primal et le maximum dual et réciproquement (théorème 7.4.). Dans le cadre classique de la convexité, on est assuré de l'existence d'un tel point col (théorème 7.5.).

Théorème 7.4. ("de dualité")

Avec les hypothèses et notations des définitions 7.2. et 7.3.,

(i) Si le Lagrangien associé au P.N.L. admet un point col (x^*, λ^*) alors

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} l(\lambda) = l(\lambda^*) = J_0(x^*)$$

(ii) Réciproquement si il existe x^* solution de P.N.L. et $\lambda^* \in \Lambda$ tel que :

$$l(\lambda^*) = J_0(x^*)$$

alors le Lagrangien associé au P.N.L. admet un point col et (x^*, λ^*) est un tel point col.

En effet : avec le théorème 7.2 (i)

$$L(x^*, \lambda^*) = l(\lambda^*)$$

d'autre part avec (iii)

$$L(x^*, \lambda^*) = J_0(x^*)$$

d'où

$$l(\lambda^*) = J_0(x^*)$$

mais avec la proposition 7.3 :

$$\forall \lambda \in \Lambda \quad \ell(\lambda) \leq J_0(x^*)$$

d'où le (i).

D'autre part si l'on suppose $\ell(\lambda^*) = J_0(x^*)$ on a par définition de $\ell(\lambda^*)$:

$$\forall x \in X_{ad} \quad J_0(x^*) \leq L(x, \lambda^*)$$

d'où avec $x = x^*$:

$$(\lambda^*, J(x^*)) \geq 0$$

mais comme x^* est solution de P.N.L. :

$$J(x^*) \leq 0$$

d'où

$$\lambda^* J(x^*) = 0$$

et donc l'hypothèse $\ell(\lambda^*) = J_0(x^*)$ peut se récrire :

$$L(x^*, \lambda^*) = \inf_{x \in X_{ad}} L(x, \lambda^*).$$

Finalement (x^*, λ^*) vérifient les trois conditions suffisantes du théorème 7.2 pour être point col d'où le (ii). \square

Théorème 7.5

Si les fonctions J_0 et J_1 sont convexes, si x est convexe, si il existe $x_0 \in X_{ad}$ tel que $J(x_0) < 0$ (hypothèse de qualification), si P.N.L. admet une solution optimale x^* alors il existe des multiplicateurs $\lambda^* \geq 0$ tel que (x^*, λ^*) soit un point col du Lagrangien associé.

Démonstration

Nous nous limitons au cas où X_{ad} est l'espace entier. On admet aussi que l'hypothèse de qualification entraîne la régularité des contraintes (Mangasarian [1969], Minoux [1983]). Les conditions d'optimalité (5.2) et (5.3) sont donc satisfaites. Mais comme $x \rightarrow L(x, \lambda)$ est convexe, la condition (5.4) : $\frac{\partial L}{\partial x}(x^*, \lambda^*) = 0$ est équivalente à

$$L(x^*, \lambda^*) = \inf_{x \in X_{ad}} L(x, \lambda^*)$$

avec cette dernière condition jointe à la condition (5.2) les conditions suffisantes de point col du théorème 7.2 sont satisfaites d'où le résultat. \square

Remarque 7.5

En présence de convexité, la résolution du problème dual fournit donc une méthode de résolution du problème primal. Cette méthode est entièrement justifiée.

En l'absence de convexité, cette méthode est intéressante car par exemple :

- $\ell(\lambda^*)$ est un minorant de $J_0(x^*)$ (proposition 7.5) ;
- près d'un optimum local, il est légitime de supposer que les fonctions sont convexes ;
- la résolution du problème dual fournit un élément $x(\lambda^*)$ qui est solution d'un problème primal perturbé (cf. Minoux [1983]).

7.3. Algorithmesa - Uzawa. Cas séparable

Comme on l'a déjà indiqué, le problème dual est un problème de maximisation sous les contraintes

$$\lambda \in \Lambda = \{\lambda \mid \lambda_i \geq 0 \quad i=1, \dots, m\}.$$

Λ est un convexe sur lequel il est facile de projeter (Proposition 6.2).

Toutefois la différentiabilité de

$$\lambda \rightarrow \ell(\lambda) = \inf_{x \in X_{ad}} (J_0(x) + (\lambda, J(x)))_{\mathbb{R}^m}$$

n'est pas immédiate à montrer et peut même ne pas être vérifiée en l'absence de point col. Dans ce dernier cas, on peut toutefois utiliser des algorithmes spécialisés (Lemaréchal [1979]).

Afin d'éviter des détails techniques nous admettons le résultat suivant dont l'énoncé est particulièrement simple (voir par exemple Céa [1971], Ekeland-Temam [1974], Minoux [1983]).

Proposition 7.6

Si $\lambda \rightarrow \ell(\lambda)$ est différentiable, sa dérivée est donnée par

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} \cdot u = (u, J(x_\lambda))_{\mathbb{R}^m}$$

où x_λ est un point minimisant de $x \rightarrow L(x, \lambda)$.

L'algorithme d'Uzawa n'est autre que le gradient projeté appliqué (§ 6.1) au problème dual, nous renvoyons aux ouvrages indiqués ci-dessus pour son étude.

Principe de l'algorithme d'Uzawa

Soit $x, \lambda \geq 0$, $\epsilon > 0$, k_{\max} ; test pas vérifié

Pour k de 1 à k_{\max} faire tant que le test pas vérifié

- Calculer $\ell(\lambda) = \inf_{x \in X_{ad}} L(x, \lambda)$ est soit x_0 le point minimisant.
- Projeter $J(x_0)$ sur Λ : soit $P_{\Lambda} J(x_0)$
(en fait pour les seuls indices pour lesquels les composantes de λ sont négatives) .
- $\lambda \leftarrow \lambda + \rho P_{\Lambda} J(x_0)$ où ρ est à déterminer par une recherche unidimensionnelle .

Si $\|J(x_0)\| \leq \epsilon$ le test est vérifié .

fin pour

Remarque 7.6

Dans le cas où le problème primal est séparable (cf. Remarque 7.4), le problème dual se calcule à l'aide d'infimum unidimensionnels. Cette méthode d'Uzawa est donc particulièrement intéressante dans cet exemple. C'est le cas pour les problèmes linéarisés d'optimisation de structures (cf. § 8.1, 8.2).

8. UTILISATION DE VARIABLES INVERSES EN OPTIMISATION DE STRUCTURES

On a représenté dans la section 6.2 une méthode pour utiliser les dérivées de fonctionnelles par rapport aux variables de conception. Cette méthode générale ne prend pas en compte comment les variables de conception interviennent dans le système considéré.

Pour le dimensionnement des structures, dans le cas où les variables de conception sont des aires de section droite de barres ou poutres ou des épaisseurs de plaques, membranes ou coques, il est beaucoup plus efficace de linéariser par rapport aux variables inverses ; cette méthode conduit à des problèmes approchés qui se résolvent commodément par dualité. Cette démarche a fait l'objet de nombreuses publications. Faute de place, citons seulement Fleury-Schmidt [1980], Fleury-Sander [1983], Fleury [1982].

Nous justifions d'abord cette méthode dans le cas de structures en extension pure ou en flexion pure puis nous passons au cas des coques où le résultat n'est que partiellement justifié.

8.1. Structures en extension ou bien en flexion

Nous exposons ce paragraphe dans le cas de structures discrétisées comme c'est habituellement le cas dans la littérature.

Les matrices de rigidité élémentaires sont de la forme $K^e = a_e^p \bar{K}^e$ où e désigne le numéro de l'élément, a_e l'épaisseur de l'élément ; $p = 1$ dans le cas d'une structure en extension et $p = 3$ dans le cas de la flexion.

Proposition 8.1

Soit une structure dont les matrices de rigidité élémentaires sont de la forme $K^e = a_e^p \bar{K}^e$ avec $p = 1$ ou bien 3 ; soit u le vecteur des déplacements nodaux $Ku = F$.

Posons

$$x_e = \frac{1}{a_e^p} \text{ et } K\lambda^j = e_j$$

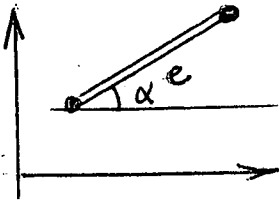
(e_j = vecteur $j^{\text{ième}}$ composante égale à 1 avec les autres composantes). On a :

$$u_j = (\lambda^j, Ku) = \sum_e a_e^p (\lambda_e^j, \bar{K}^e u_e) = \sum_e \frac{1}{x_e} (\lambda_e^j, \bar{K}^e u_e)$$

où λ_e , u_e désignent les vecteurs élémentaires associés aux vecteurs globaux λ et u .

En effet, comme K est une matrice autoadjointe $(\lambda^j, Ku) = (K\lambda^j, u)$ d'où comme $K\lambda^j = e_j$ on a bien $(\lambda^j, Ku) = u_j$; les autres expressions résultent de l'assemblage des éléments finis. \square

Nous allons voir que ce résultat a une interprétation très simple dans le cas d'un treillis isostatique de barres.



Si T^e désigne la tension dans la barre de numéro e et α^e l'angle de la barre avec un axe de référence, il est connu que l'on a :

$$T^e = \frac{E^e a^e}{l^e} B^e u^e$$

où

$$B^e = [\cos \alpha^e \quad \sin \alpha^e \quad -\cos \alpha^e \quad -\sin \alpha^e]$$

et a^e désigne l'aire de la section droite. La matrice de rigidité élémentaire est donnée par $K^e = B^{eT} \frac{E^e a^e}{l^e} B^e$ d'où par assemblage $K = B^T DB$

et le déplacement u est solution de $Ku = F$. Le caractère isostatique du treillis est équivalent à la possibilité de calculer T par résolution de $B^T T = F$ on peut ensuite calculer u en résolvant $DBu = T$.

Proposition 8.2

Soit un treillis isostatique de barres, avec les notations ci-dessus et celles de la proposition 8.1., posons $B^T \tau^j = e_j$ on a :

$$u_j = (\tau^j, D^{-1}T) = \sum_e \frac{x^e l^e}{E^e} (\tau_e^j, T^e).$$

En effet τ^j est le vecteur des contraintes, associé à la charge e_j , il est donc lié au vecteur des déplacements λ^j solution de $K\lambda^j = e_j$ par $DB\lambda^j = \tau^j$.

On peut donc transformer la formule de la Proposition 8.1. :

$$u_j = (\lambda^j, Ku) = (\lambda^j, B^T DB u) = (\tau^j, Bu)$$

or $Bu = D^{-1}T$ d'où la formule $u_j = (\tau^j, D^{-1}T)$; l'autre expression indiquée résulte encore du principe de l'assemblage des éléments finis. \square

Remarque 8.1

Comme conséquence de l'hypothèse d'isostaticité on constate que T et τ^j ne dépendent pas des variables de conception x^e car ils sont solution d'un système linéaire de matrice B^T qui ne dépend que de la position des barres ; notons que ceci n'est exact que si les charges extérieures ne dépendent pas des variables de conception (on néglige le plus souvent le poids propre du treillis). A cette restriction près on en conclut donc que l'expression de u_j indiquée dans la proposition 8.2 est totalement explicite par rapport aux variables de conception x^e . De plus on constate que u_j dépend linéairement des variables inverses x^e .

Corollaire 8.2

Sous les hypothèses de la proposition 8.2., on a

$$\frac{\partial u_j}{\partial x^e} = \frac{l^e}{E^e} (\tau^{je}, T^e) = \frac{1}{(x_e)^2} (\lambda_e^j, \bar{K}^e u_e)$$

cette expression est indépendante des variables de conception.

Pour obtenir ce corollaire il suffit d'utiliser les relations

$$T^e = \frac{E^e}{x_e l^e} B^e u^e \quad \tau^{je} = \frac{E^e}{x_e l^e} B^e \lambda_e^j \quad \text{et} \quad K^e = \frac{1}{x_e} \bar{K}^e.$$

□

Remarque 8.2

$$\text{Posons } Q_{ej} = \frac{l^e}{E^e} (\tau^{je}, T^e) = \frac{1}{(x_e)^2} (\lambda_e^j, \bar{K}^e u_e)$$

(parfois appelé coefficient de flexibilité, parfois densité d'énergie virtuelle de déformation) la proposition 8.2 et son corollaire peuvent se reformuler en :

$$u_j = \sum_e x^e Q_{ej} \quad \text{avec} \quad Q_{ej} = \frac{\partial u_j}{\partial x_e}$$

où Q_{ej} ne dépend pas des variables de conception.

Dans le cas d'une structure quelconque on va obtenir une formule de forme similaire.

Proposition 8.3

Sous les hypothèses de la proposition 8.1 on a

$$u_j(x) = \sum_e x^e Q_{ej}(x) \quad \text{avec}$$

$$Q_{ej}(x) = \frac{1}{(x_e)^2} (\lambda_e^j, \bar{K}^e u_e) = \frac{1}{x_e} (\lambda_e^j, K^e u_e)$$

Ce résultat est une conséquence immédiate de la formule indiquée dans la proposition 8.1. :

$$u_j = \sum_e \frac{1}{x_e} (\lambda_e^j, \bar{K}^e u_e).$$

Il faut toutefois remarquer que l'on a obtenu dans le cas d'une structure quelconque en extension ou bien en flexion une formule similaire à celle du treillis isostatique de barres ; dans ce dernier cas Q_{ej} ne dépend pas des variables de conception ; intuitivement on conçoit donc que ces quantités Q_{ej} variant peu d'un élément quelconque pour un treillis hyperstatique de barres ou pour une structure plus générale en extension (ou bien en flexion). C'est ce qui est constaté numériquement (voir par exemple Fleury-Schmidt [1980]) ; nous allons en partie le préciser dans les deux propositions suivantes.

Proposition 8.4

Sous les hypothèses des propositions 8.1. et 8.3., on a :

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_e} = - (\lambda_e^j, \frac{\partial K^e}{\partial x_e} u_e) + (\lambda_e^j, \frac{\partial F}{\partial x_e}) \text{ ou}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_e} \equiv Q_{ej}(x) + (\lambda_e^j, \frac{\partial F}{\partial x_e})$$

Si F ne dépend pas des variables de conception :

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_e} = Q_{ej}(x)$$

Démonstration

Nous admettons la dérivabilité de $x \rightarrow u(x)$ (c.f. § 2.4). Posons $J(u) = \langle e_j, u \rangle$ et utilisons la méthode de l'état adjoint introduite dans le § 2.3.

On a $\frac{\partial J}{\partial u} = e_j$ d'où l'état adjoint λ^j est solution de $K\lambda^j = e_j$ (identique à l'équation qui définit λ^j dans la proposition 8.1) et l'on a en posant $j(x) = J(u(x))$:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_e} = \frac{\partial j}{\partial x_e} - (\lambda_e^j, \frac{\partial K}{\partial x_e} u) + (\lambda_e^j, \frac{\partial F}{\partial x_e})$$

mais comme chaque matrice élémentaire K^e ne dépend que de x_e on obtient :

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_e} = - (\lambda_e^j, \frac{\partial K^e}{\partial x_e} u_e) + (\lambda_e^j, \frac{\partial F}{\partial x_e})$$

d'où comme $K^e = \frac{1}{x_e} \bar{K}^e$ on obtient

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_e} = \frac{1}{(x_e)^2} (\lambda_e^j, \bar{K}^e u_e) + (\lambda^j, \frac{\partial F}{\partial x_e}).$$

□

Proposition 8.5

Sous les hypothèses des propositions 8.1. et 8.5., on a :

$$(i) \quad u_j(x_0) = \sum_e x_{oe} Q_{ej}(x_0)$$

avec

$$Q_{ej}(x_0) = \frac{1}{(x_{oe})^2} (\lambda_e^j, \bar{K}^e u_e)$$

$$(ii) \quad u_j(x) = \sum_e x_e Q_{ej}(x_0) + \sum_e (\lambda^j, \frac{\partial f}{\partial x_e} \Big|_{x=x_0}) (x_e - x_{oe}) + o(\|x - x_0\|)$$

Démonstration

Le (i) est un rappel de la proposition 8.3 écrit en $x = x_0$ pour le rapprocher du résultat du (ii).

Ecrivons la différentiabilité de $x \rightarrow u(x)$:

$$u_j(x) = u_j(x_0) + \sum_e \frac{\partial u_j}{\partial x_e} \Big|_{x=x_0} (x_e - x_{oe}) + o(\|x - x_0\|)$$

Avec le (i) et la proposition 8.4., il vient :

$$\begin{aligned} u_j(x) &= \sum_e x_{oe} Q_{ej}(x_0) + \sum_e Q_{ej}(x_0) (x_e - x_{oe}) \\ &\quad + \sum_e (\lambda^j, \frac{\partial f}{\partial x_e} \Big|_{x=x_0}) (x_e - x_{oe}) \end{aligned}$$

d'où le (ii) en simplifiant.

□

Les résultats précédents sont récapitulés dans

Théorème 8.5

Sous les hypothèses des propositions 8.1. et 8.3., le problème de minimisation de

$$J_0(a) = \sum_e \rho_e a_e$$

sous les contraintes

$$u_j(a) \leq u_j$$

où u est solution de

$$K(a)u = F$$

et

$$\underline{a}_e \leq a_e \leq \bar{a}_e$$

peut être approché, en linéarisant les contraintes par rapport aux variables inverses, par : minimiser $J_0(x) = \sum \rho_e \frac{1}{x_e}$ sous les contraintes (cas de charges indépendantes des variables de conception)

$$\sum Q_{ej}(x_0) x_e \leq u_j$$

$$\frac{1}{\bar{a}_e} \leq x_e \leq \frac{1}{\underline{a}_e}$$

Si les charges dépendent des variables de conception, l'expression des contraintes linéarisées s'écrit

$$\sum [Q_{ej}(x_0) + (\lambda^j, \frac{\partial f}{\partial x_e} \Big|_{x=x_0})] x_e \leq \bar{u}_j + \sum (\lambda^j, \frac{\partial f}{\partial x_e} \Big|_{x=x_0}) x_0^e$$

8.2. Utilisation d'un problème d'optimisation de structures linéarisées par rapport aux variables inverses

Pour résoudre un problème de conception optimale du type

$$J_0(a) = \sum \rho_e a_e \text{ sous les contraintes}$$

$$u_j(a) \leq u_j \quad K(a)u = F$$

$$\underline{a}_e \leq a_e \leq \bar{a}_e,$$

on a vu dans le chapitre 6 que l'on pouvait linéariser par rapport aux variables de conception et utiliser le gradient projeté.

Si l'on choisit de linéariser par rapport aux variables inverses on peut encore résoudre le problème linéarisé par rapport aux nouvelles variables (Voir théorème 8.5) par une méthode de gradient projeté. Mais on peut aussi choisir de résoudre ce problème par une technique de dualité (voir chapitre 7).

La fonctionnelle duale se calcule en effet par des infimums unidimensionnels (cf. Remarque 7.4) :

$$l(\lambda) = \sum_e \inf_{\frac{1}{\bar{a}_e} \leq x_e \leq \frac{1}{\underline{a}_e}} \left(\frac{\rho_e}{x_e} + \sum_j \lambda^j (Q_{ej}(x_0) x_e - \bar{u}_j) \right)$$

On constate que \bar{u}_j n'intervient pas dans la détermination du x minimisant ; chaque inférieur unidimensionnel se calcule ici explicitement :

$$\begin{aligned}
 x_e &= \left(\frac{\rho_e}{\sum \lambda^j Q_{ej}} \right)^{1/2} \text{ si } \underline{a}_e^2 \leq \frac{\sum \lambda^j Q_{ej}}{\rho_e} \leq \bar{a}_e^2 \\
 x_e &= 1/\bar{a}_e \text{ si } \bar{a}_e^2 < (\sum \lambda^j Q_{ej}) / \rho_e \\
 x_e &= 1/\underline{a}_e \text{ si } (\sum \lambda^j Q_{ej}) / \rho_e < \underline{a}_e^2
 \end{aligned}$$

Comme indiqué dans le § 7.3., il est donc facile de résoudre notre problème en maximisant $l(\lambda)$ dans $\Lambda = \{\lambda \mid \lambda \geq 0\}$ par exemple par une méthode de gradient projeté : c'est l'algorithme d'Uzawa.

On vient donc d'indiquer deux méthodes du premier ordre, l'une pour le problème primal, l'autre pour le dual.

Cependant, compte tenu de la forme simple des problèmes considérés il est tout à fait envisageable de résoudre ces problèmes par une méthode du deuxième ordre (c.f. Fleury (1982) et Fleury-Sander (1983)) beaucoup plus efficace.

Nous renvoyons aussi à Fleury (1982) pour une mise en perspective des méthodes de résolution par critère d'optimalité dont nous n'avons pas parlé ici dans le cadre des méthodes primales et duales. Dans ce cadre, il interprète également la méthode du "stress rationing" inspiré du principe du "fully stressed design" : elle apparaît comme une méthode d'ordre zéro (sans utilisation de dérivées).

CONCLUSION

On a indiqué dans ce rapport comment on peut calculer les dérivées partielles de fonctionnelles de l'état d'un système régi par équations aux dérivées partielles ; nous avons mis plus particulièrement l'accent sur les exemples de la mécanique des structures et de l'approximation par éléments finis.

Nous avons ensuite essayé de dégager les idées de base en optimisation sans contraintes et avec contraintes en vue d'utiliser ces dérivées partielles pour la minimisation sur les déplacements.

L'utilisation de variables inverses dans les problèmes d'optimisation de structures fournit une linéarisation de meilleure qualité des contraintes et ainsi une méthode numérique plus efficace ; l'utilisation de la dualité se révèle très avantageuse.

INDEX DES PRINCIPALES NOTATIONS

$a(u,u)$	énergie de déformation d'une structure discrète ou continue (p.11, 12...) ; notée
$a(x;u,u)$	pour préciser la dépendance par rapport à la variable de conception x .
a_e	dans une structure discrète, désigne une épaisseur, aire etc... (p. 71).
e	numéro courant d'un élément fini (p. 71).
$J(x), j(x)$	fonctionnelle de la variable x (pp. 18, 63).
$J(u,u(x))$	fonctionnelle de la variable x et de l'état $u(x)$ de la structure (p. 18).
K	matrice de rigidité globale (réduite) (p. 4).
K^e	matrice de rigidité élémentaire (p. 71).
$\ell(v)$	travail virtuel des forces extérieures dans le déplacement virtuel v (pp. 11, 12...).
ℓ_j	vecteur de \mathbb{R}^N (p. 51).
λ	état adjoint (p. 10) ; multiplicateur de Lagrange (p. 62).
M	matrice qui intervient dans le gradient projeté (p. 55).
p	forces extérieures appliquées à la structure (p. 4).
Q_{ej}	coefficient de flexibilité (p. 73).
ρ	point minimisant une fonctionnelle dans une direction (p. 36).
ρ_e	masse surfacique de l'élément de numéro e (p. 5).
u	déplacement réel d'une structure discrète ou continue (pp. 4, 11...).
v	déplacement virtuel d'une structure discrète ou continue (p. 12).
V	espace de déplacements virtuels (p. 12).
w	direction de descente d'une fonctionnelle (p. 33).
x	variable de conception (p. 4).
x_e	inverse de variable de conception dans l'élément de numéro e (p. 71).
X	espace de conception (p. 17).
ξ	variable d'espace pour structure continue (p. 12).

BIBLIOGRAPHIE

- BANICHUK, N.V. : Problems and methods of optimum structural design, Plenum, New York [1983].
- BOISSERIE, J.M. ; GLOWINSKI, R. : Optimization of the thickness law for thin axisymmetric shells, Comp. Struct. [1978], pp. 331-343.
- CHENAIS, D. ; ROUSSELET, B. ; BENEDICT R. : Design sensitivity for arch structures. J.O.T.A. [1986 à paraître].
- CEA, J. : Optimisation : théorie et algorithmes, Dunod Paris [1971].
- CEA, J. ; GIOAN, A. ; MICHEL, J. : Adaptation de la méthode du gradient à un problème d'identification de domaine, Computing methods in applied science and engineering, Springer-Verlag, Berlin [1974].
- CEA, J. ; ROUSSELET, B. Ed. : Conception optimale de formes, Ecole INRIA [26-30 septembre 1983, Nice].
- CHAVENT, G. : Analyse fonctionnelle et identification de coefficients répartis dans les équations aux dérivées partielles. Université de Paris [1971], Thèse d'Etat.
- CHENAIS, D. : Sur une famille de variétés à bord lipschitziennes : application à un problème d'identification de domaines, Annales de l'Institut Fourier [1977], 27, pp. 201-231.
- CHENAIS, D. : Optimal design of midsurface of shells : differentiability proof and sensitivity computation [1986 à paraître].
- CHENAIS, D. ; ROUSSELET, B. : Différentiation du champ de déplacements dans une arche par rapport à la forme de la surface moyenne en élasticité linéaire, C.R. Acad. Sci. Paris, tome 298 [1984], pp. 533-536.
- CHENAIS, D. ; ROUSSELET, B. : Dépendance de la charge critique de flambement d'une arche par rapport à l'épaisseur et à la surface moyenne [1986 à paraître].
- CIARLET, P. : Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Masson, Paris [1982].
- DERVIEUX, A. ; PALMERIO, B. : Une formule de Hadamard dans les problèmes d'identification de domaines, C. R. de l'Académie des Sciences, 280, pp. 1697-1700 et 280 pp. 1761-1764 [1975].

- DUVAUT, G. ; LIONS, J.L. : Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris [1972].
- EKELAND, I. ; TEMAM, R. : Analyse convexe et problèmes variationnels, Dunod Gauthier-Villars, Paris [1974].
- FLEURY, C. : Introduction to mathematical programming method, dans MORRIS Ed., pp. 273-296 [1982] ; Unconstrained and linearly constrained minimization, dans MORRIS Ed., pp. 299-332 [1982] ; General nonlinear programming method, dans MORRIS ed., pp. 335-358 [1982] ; Reconciliation of mathematical programming and optimality criteria methods, dans MORRIS Ed., pp. 363-402 [1982].
- FLEURY, C. ; SANDER, G. : Dual methods for optimizing finite element flexural systems, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 37, pp. 249-275 [1983].
- FLEURY, C. ; SCHMIDT, L.A. : Primal and dual methods in structural optimization, J. Struct. Division, ASCE, 106 (STS), pp. 1117-1133 [1980].
- HAUG, E. ; ARORA, J. : Applied optimal design, John Wiley, New York [1979].
- HAUG, E. ; CEA, J. Ed. : Optimization of distributed parameter structures, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, Netherlands [1981].
- HAUG, E. ; CHOI, K. ; KOMKOV, V. : Design sensitivity analysis of structural systems, Academic Press, New York [1986].
- IOFFE, A.D. ; TIHOMIROV, V.M. : Theory of extremal problems. Amsterdam New-York Oxford, North Holland [1979].
- KOITER, W.T. : On the nonlinear theory of thin elastic shells, Proc. Kon. Ned., Akad. Wetensch., B69, pp. 1-54.
- LEMARECHAL, C. : Bundle methods in nonsmooth optimization, Nonsmooth optimization, ed. par LEMARECHAL C. & MIFFLIN R., Pergamon Press, pp. 79-102 [1979].
- LIONS, J.L. : Controle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Dunod, Paris [1968].
- LIONS, J.L. : Controle des systèmes distribués singuliers, Dunod, Paris [1983].

- LUENBERGER, D.G. : Introduction to linear and nonlinear programming, Addison-Wesley, Reading [1973].
- MANGASARIAN, O. : Nonlinear programming, Mac Graw-Hill, New York [1969].
- MINOUX, M. : Programmation mathématique : théorie et algorithmes, Dunod, Paris [1983].
- MORRIS, A.J. Ed. : Foundations of structural optimization : A unified approach, John Wiley, New York [1982].
- MURAT, F. ; SIMON, J. : Sur le contrôle par un domaine géométrique, Publication du L.A. 189, Université de Paris VI [1976].
- PSENICNYI, B. ; DANILIN, Y. : Méthodes numériques dans les problèmes d'extremum, Mir, Moscou [1977].
- PIRONNEAU, O. : Optimal shape design for elliptic systems, Springer Verlag, New York [1986].
- PIRONNEAU, O. Ed. : Optimisation de forme dans les systèmes à paramètres distribués : résolution numérique et applications, Ecole INRIA, Rocquencourt, France [8-10 novembre 1982].
- POLAK, E. : Computational methods in optimization, Ac. Press, New York [1971].
- ROSEN, J.B. : The gradient projection method for nonlinear programming, Part I : Linear constraints, SIAM J. of Appl. Math., 8, pp. 181-217 [1960]
Part II : Nonlinear constraints, 9, pp. 514-532 [1961].
- ROUSSELET, B. : Etude de la régularité des valeurs propres par rapport à des déformations bilipschitziennes du domaine, C.R. de l'Académie des Sciences, série I, 283, p. 507 [1976].
- ROUSSELET, B. : Identification de domaines de valeurs propres, Université de Nice, Thèse de spécialité, France [1977].
- ROUSSELET, B. : Quelques résultats en optimisation de domaines, Thèse, Université de Nice [1982].
- ROUSSELET, B. : Shape design sensitivity of a membrane J.O.T.A., 40, pp. 595-623 [1983].
- ROUSSELET, B. : Static and dynamic loads, pointwise constraint in structural optimization, C.R. du Colloque "Optimization : theory and algorithms", (Compolant, France [1981]), M. Dekker [1983].

ROUSSELET, B. ; CHENAIS, D. : Continuité et différentiabilité des éléments propres : application à l'optimisation de structures [1986 à paraître].

ROUSSELET, B. ; HAUG, E. : Design sensitivity analysis in structural mechanics, III Effects of shape variation, J. of Struct. Mech. pp. 273-310 [1982-1983].

SOKOLOWSKI, J. : Differential stability of solutions to constrained optimization problems, rapport INRIA 312 [1984].

TEMAM, R. : Problèmes mathématiques en plasticité, Gauthier-Villars, Paris [1983].

VALID, R. : Mechanics of continuous media and analysis of structures, North-Holland, [1981].

ZOLESIO, J.P. : Identification de domaines par déformations, Université de Nice, France, Thèse [1979].

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

